حساب السرعة عند نقطة معينة

يكفي استعمال معادلتي السرعة، حيث تحدد المركبتين v_x و v_z وحساب $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ انطلاقا من معرفة اللحظة التي نريد عندها حساب السرعة.

حساب قمة المسار

عند قمة المسار يكون $v_z = 0$ و v_x دائما ثابتة : $v_x = v_0 . \cos\alpha$

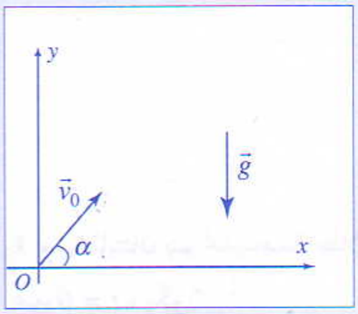
نستخرج اللحظة t_S لوصول المتحرك إلى قمة المسار من معادلة السرعة $v_z(t)$ بتعويض v_z بصفر، وبتعويض t_S في المعادلتين الزمنيتين، نحصل على الإحداثيين $x(t_S)$ و $z(t_S)$.

تمرين 1 كرة الكولف

يقذف لاعب كرة الكولف بسرعة متجهتها $\vec{v}_0$ تكون زاوية $\alpha = 30°$ مع المستوى الأفقي.

نهمل جميع الاحتكاكات ونمائل كرة الكولف بنقطة مادية كتلتها m.

نمعلم موضع الكرة بالإحداثيين x و y في المعلم (Ox,Oy) ، حيث Ox محور أفقي و Oy محور رأسي، كما يبين الشكل جانبه.



عند اللحظة $t=0$، توجد الكرة عند النقطة O أصل المعلم (Ox,Oy).

1 - أثبت في المعلم (Ox,Oy) المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$ لحركة الكرة.

2 - استنتج معادلة مسار الكرة.

3 - يريد اللاعب إرسال الكرة إلى الثقب الذي يبعد عن نقطة الارسال O بالمسافة $x_P = 425m$ ؛

حدد قيمة السرعة v_0 ،التي يجب أن يقذف بها اللاعب الكرة تحت الزاوية α لتسقر في الثقب. نعطي : $g = 10m.s^{-2}$

حل

1 - إثبات المعادلتين الزمنيتين

نهمل الاحتكاكات، ونعتبر أن الكرة تخضع أثناء حركتها، لوزنها فقط $\vec{P} = m\vec{g}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة، في المرجع الأرضي، نكتب :

$$m\vec{g} = m.\vec{a} \quad \text{أي أن :} \quad \vec{a} = \vec{g} \quad (1)$$

الشروط البدئية للحركة :

عند $t = 0$ لدينا : $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$ و $\vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 . \cos\alpha \\ v_{oy} = v_0 . \sin\alpha \end{vmatrix}$

بإسقاط العلاقة (1) على المحورين Ox و Oy، نحصل على :

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$$

بما أن : $\begin{vmatrix} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{vmatrix}$ ، نحصل بالتكامل، مع اعتبار الشروط البدئية على :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 . \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

وبما أن $\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$ ، نحصل بالتكامل مع اعتبار الشروط البدئية على :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha).t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 . \sin\alpha).t \end{cases}$$

وهما المعادلتان الزمنيتان للحركة.

2 - استنتاج معادلة المسار

نستنتج معادلة المسار بتركيب المعادلتين $x(t)$ و$y(t)$ عن طريق إقصاء الزمن t :

لدينا : $x = (v_0 \cos\alpha).t$ ومنه : $t = \dfrac{x}{v_0 . \cos\alpha}$

نعوض t بتعبيرها في $y(t)$، فنحصل على : $y = -\dfrac{1}{2}g.\dfrac{x^2}{v_0^2 . \cos^2\alpha} + x.\tan\alpha$

3 - تحديد السرعة v_0 لتصل الكرة إلى الثقب ذي الإحداثي x_P .

لتدخل الكرة إلى الثقب، يجب أن يكون إحداثياها هما $x = x_P$ و $y = 0$ ؛ إذن، حسب معادلة المسار :

$-\dfrac{1}{2}g.\dfrac{x_P^2}{v_0^2 . \cos^2\alpha} + x_P . \tan\alpha = 0$ ومنه : $v_0^2 = \dfrac{g.x_P}{2.\cos^2\alpha \ \tan\alpha} = \dfrac{g.x_P}{2.\sin\alpha.\cos\alpha}$

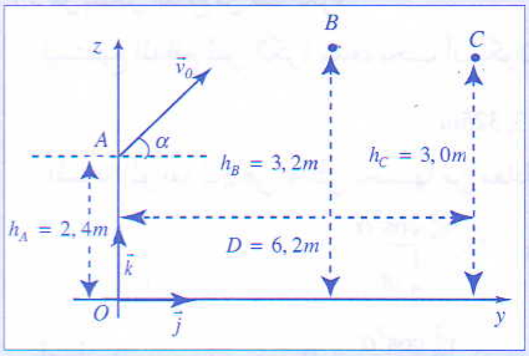
وبما أن $2\sin\alpha.\cos\alpha = \sin 2\alpha$ نحصل على : $v_0^2 = \dfrac{g.x_P}{\sin 2\alpha}$

إذن : $v_0 = \sqrt{\dfrac{g.x_P}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{10.425}{\sin 60°}} \approx 70 m.s^{-1}$

تمرين موضوعاتي 2 كرة السلة

يهدف هذا التمرين إلى دراسة حركة مركز قصور كرة السلة تم إرسالها نحو دائرة السلة من طرف لاعب مهاجم.

نهمل قوة الاحتكاك التي يطبقها الهواء على الكرة. يرسل المهاجم الكرة ،عند $t = 0$ ،عندما يكون مركز قصورها في النقطة A المبينة على الشكل جانبه.



تمثل السرعة البدئية لمركز القصور G للكرة بالمتجهة $\vec{v}_0$ في المستوى $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

تُكوِّن متجهة السرعة $\vec{v}_0$ الزاوية α مع المستوى الأفقي المار من A.

1 - أثبت المعادلات الزمنية لحركة G. استنتج معادلة المسار.

2 - احسب القيمة التي يجب أن تأخذها السرعة $\vec{v}_0$ لتمر الكرة، بالضبط من المركز C لدائرة السلة، (استعمل المعطيات الواردة في الشكل جانبه).

3 - يقفز مدافع يتموضع بين المهاجم والسلة، رأسيا، ليصد الكرة، حيث تصل أصابع يده إلى نقطة B ارتفاعها $h_B = 3,2m$

احسب المسافة الأفقية القصوى الفاصلة بين المهاجم والمدافع ليتمكن هذا الأخير من صد الكرة.

نعطي : قطر الكرة $d = 25cm$ ؛ $\alpha = 40°$ ؛ $g = 9,80m.s^{-2}$

حل

1 - معادلة المسار

تخضع الكرة أثناء حركتها، في المرجع الأرضي، إلى وزنها فقط $\vec{P} = m.\vec{g}$.

نهمل قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على الكرة.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة نكتب :

$m\vec{g} = m.\vec{a}_G$ ومنه : $\vec{a}_G = \vec{g}$ *(1)* مع $\vec{a}_G$ تسارع مركز القصور G للكرة.

الشروط البدئية للحركة :

$$\vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_{0y} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OG_0} \begin{vmatrix} y_0 = 0 \\ z_0 = h_A \end{vmatrix}$$

بإسقاط العلاقة *(1)* على المحورين Oy وOz نحصل على :

$$\vec{a}_G \begin{vmatrix} a_y = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{v}_G \begin{vmatrix} v_y = cte = v_0.\cos\alpha \\ v_z = -gt + cte = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} y = (v_0 \cos\alpha).t \\ z = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + (v_0 \sin\alpha.)t + h_A \end{vmatrix}$$

بإقصاء t بين العلاقتين الأخيرتين نحصل على معادلة المسار

$$z = -\frac{1}{2}g.\frac{y^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + y.\tan\alpha + h_A$$

2 - قيمة v_0.

ليتم تسجيل الإصابة يجب أن يكون : $z = h_C = 3,0m$ و $y = D = 6,2m$

نعوض في معادلة المسار لتحديد قيمة السرعة v_0 في هذه الشروط

إذن :

$$v_0 = \sqrt{\frac{-\dfrac{1}{2}g.\dfrac{y^2}{\cos^2\alpha}}{z - y.\tan\alpha - h_A}} = \sqrt{\frac{\dfrac{-0,5.9,8.(6,2)^2}{\cos^2 40°}}{3,0 - 6,2.\tan 40° - 2,4}} = 8,4m.s^{-1}$$

3 - هل يتمكن المدافع من صد الكرة ؟

ليستطيع المدافع لمس الكرة بيده، يجب أن يكون أرتوب مركز قصورها هو :

$$z = h_B + \frac{d}{2} = 3,2 + \frac{0,25}{2} = 3,325m$$

المسافة الموافقة لـ z هي y التي نحسبها من معادلة المسار التالية :

$$y^2 = \frac{v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{\frac{1}{2}g}.y + (h_A - z).\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{\frac{1}{2}.g}$$

أي أن :

$$y^2 - \frac{v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{\frac{1}{2}g}.y - (h_A - z).\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{\frac{1}{2}.g} = 0$$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية صيغتها : $ay^2 + by + c = 0$ مع $a = 1$

و $$b = -\frac{v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{0,5.g} = -\frac{(8,4)^2.\cos^2 40°.\tan 40°}{0,5.9,8} = -7,1$$

و $$c = -\frac{(h_A - z).v_0^2.\cos^2\alpha}{0,5.g} = -\frac{(2,4-3,325)(8,4)^2.\cos^2 40°}{0,5.9,8} = 7,8$$

إذن : $$y^2 - 7,1.y + 7,8 = 0$$

نحسب Δ : $$\Delta = b^2 - 4a.c = (-7,1)^2 - 4.1.7,8 = 19,21$$

إذن الحلان هما :
$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7,1-\sqrt{19,21}}{2} = 1,36m$$
$$y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7,1+\sqrt{19,21}}{2} = 5,74m$$

يجب إذن، أن يتموضع المدافع على مسافة أفقية قصوى $y_{max} = 5,74m$ من المهاجم لكي يتمكن من صد الكرة بيده.

تمرين موضوعاتي 3 كرة القدم

أثناء مباراة لكرة القدم، قذف لاعب الكرة الموضوعة على عشب الملعب بسرعة $v_0 = 25m.s^{-1}$ في اتجاه يكون زاوية $\alpha = 17°$ بالنسبة للمستوى الأفقي.

1 - بافتراض أن القوة المطبقة من طرف الهواء على الكرة مهملة أمام وزنها، بين أن مسار مركز قصور الكرة مستو؛ وأثبت معادلته. نأخذ كأصل للتواريخ لحظة قذف الكرة.

2 - توجد نقطة قذف الكرة على بعد $11m$ من المرمى.

علما أن قطر الكرة هو $d = 22cm$ وارتفاع العارضة الأفقية للمرمى عن سطح الملعب هو $h = 2,4m$، بين أن الكرة لا تمر تحت العارضة الأفقية للمرمى. في أية حالة تصطدم الكرة بالعارضة الأفقية ؟

حل

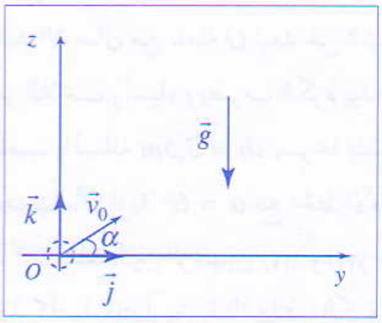
1 - معادلة المسار

تخضع الكرة أثناء حركتها، في المرجع الأرضي، إلى وزنها فقط ؛

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة نكتب :

$m.\vec{g} = m.\vec{a}$ ومنه : $\vec{a} = \vec{g}$ (1)

حيث $\vec{a} = \vec{a}_G$ تسارع مركز قصور الكرة.



بما أن السرعة $\vec{v}_0$ والتسارع $\vec{a}$ متجهتان توجدان في المستوى Oyz

فإنه لا يوجد أي سبب لتغادر الكرة هذا المستوى، إذن يوجد مسار G في المستوى Oyz، أي أنه مستو.

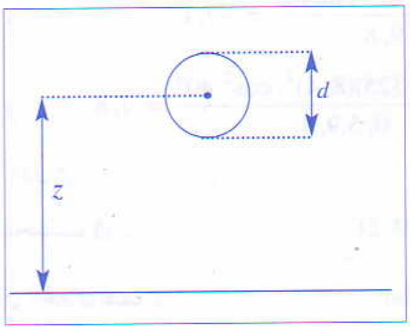
لإثبات معادلة المسار، نعتبر الشروط البدئية التالية :

- نقطة الانطلاق: $O(0,0)$

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0y} = v_0\cos\alpha \\ v_{oz} = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

بإسقاط العلاقة (1) على المحورين Oy وOz نحصل على :

ومنه بالتكامل : $\vec{a}\begin{cases} a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$ ، $\vec{v}\begin{cases} v_y = k = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + k' = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$



وبالتكامل كذلك نحصل على : $\overrightarrow{OG}\begin{cases} y = (v_0 \cos\alpha).t \quad (2) \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha).t \ ; \ (3) \end{cases}$

تعطي العلاقة (2) : $t = \dfrac{y}{v_0.\cos\alpha}$ ؛

نعوض في العلاقة (3) : $z = -\dfrac{1}{2}g.\dfrac{y^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + y.\tan\alpha$ وهي معادلة المسار.

2 - هل تسجل الإصابة ؟

لتسجيل الإصابة في المرمى يجب أن يكون $z + \dfrac{d}{2} < 2,4m$ مع $h = 4,2m$ ارتفاع العارضة الأفقية.

نحسب z الارتفاع الموافق للأفصول $y = 11m$، باستعمال معادلة المسار :

$$z = -\frac{1}{2}.9,8.\frac{(11)^2}{(25)^2.\cos^2 17°} + 11.\tan 17° = 2,32m$$

لتمر الكرة تحت العارضة الأفقية يجب أن يكون $z < 2,40 - \dfrac{d}{2}$ ، أي $z < 2,29\ m$.

إذن بما أن $z = 2,32m$، فإن الكرة لا تمر تحت العارضة.

ملحوظة : تصطدم الكرة بالعارضة في المجال $2,40 - \dfrac{d}{2} < z < 2,40 + \dfrac{d}{2}$ أي $2,29m < z < 2,51m$