المجموعات الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة
تصحيح التمارين

تمرين 1

1 ـ 1 تحديد $\Delta\ell$ عند التوازن $\vec{P}+\vec{F}=\vec{0}$ الإسقاط على Oz $mg-K\Delta\ell=0$

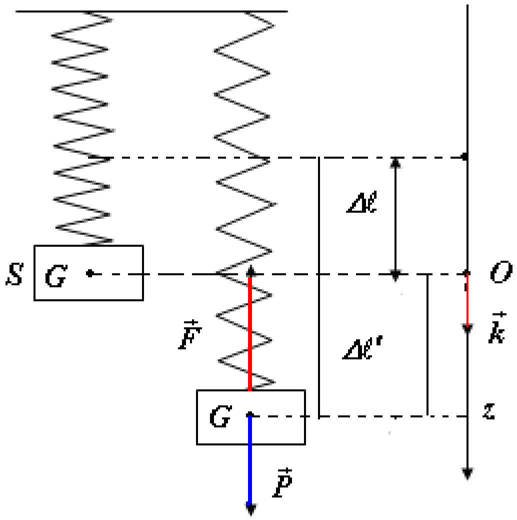
إذن $\Delta\ell=\frac{mg}{K}$ تطبيق عددي $\Delta\ell=2,5cm$

2 ـ1 تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية للديناميك $\vec{P}+\vec{F}'=m\vec{a}$ إسقاط العلاقة على Oz

$mg-K\Delta\ell'=m\ddot{z}$ بحيث أن $\Delta\ell'$ إطالة النابض عند اللحظة t $\Delta\ell'=\Delta\ell+z$

عند التوازن $mg-K\Delta\ell=0$ إذن $-Kz=m\ddot{z}$ أي



أن المعادلة التفاضلية للحركة هي $\ddot{z}+\frac{K}{m}z=0$

نضع $\omega_0{}^2=\frac{K}{m}$ وتصبح المعادلة $\ddot{z}+\omega_0{}^2z=0$

إذن فالحركة مستقيمية جيبية نبضها الخاص هو :

$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$

2 ـ 2 المعادلة الزمنية للحركة

$z=Z_m\cos(\omega_0t+\varphi)$ بحيث أن

$Z_m=4.10^{-2}m$ و $\omega_0=20rad/s$ و عند اللحظة

t=0 عندنا $z=Z_m$ أي أن $\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$z=4.10^{-2}\cos(20t)$

2 ـ 3 نبين أن $V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

نحدد السرعة في اللحظة t وذلك باشتقاق z(t) $v=-Z_m\omega_0\sin(\omega_0t+\varphi)$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوية $V_1=\pm Z_m\omega_0$ وبما أنه يمر

لأول مرة فسيكون منحى السرعة عكس المتجهة $\vec{k}$ أي أن $\vec{V}_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}\vec{k}$ أي أن $V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

تطبيق عددي $V_1=0,8m/s$

3

الهواء

تسارع الجسم هو a=g ونأخذ $z_0=0$ والسرعة البدئية $V_0=-V_1$

$z=5t^2+0,8t$

تمرين 2

1 ـ المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S)

المجموعة (S) قابلة للدوران حول المحور Δ

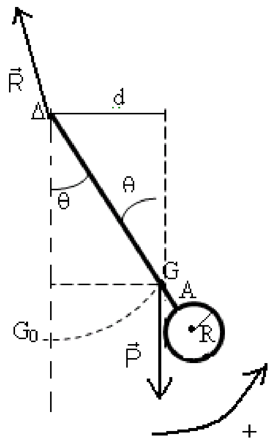
نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة (S) في معلم أرضي نعتبره غاليليا .

جرد القوى المطبقة على المجموعة (S) :

$\vec{P}$ و $\vec{R}$ تأثير المحور على الجسم (S) .

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)+\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{R}\right)=J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{R}\right)=0\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$



من خلال الشكل يتبين أن

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=-2mg.OH$$

$$OH=OG\sin\theta$$

لنحدد OG بتطبيق العلاقة المرجحية على المجموعة (S) :

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{m\overrightarrow{OG_1}+m\overrightarrow{OG_2}}{2m}$ بحيث أن G_1 مركز قصور الساق و G_2 مركز قصور الكرة ز

ونختار O متطابقة مع المحور Δ . أي أن $\overrightarrow{OG_1}=5R\vec{i}$ و $\overrightarrow{OG_2}=11R\vec{i}$

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{16R}{2}\vec{i}=8R\vec{i}$ وبالتالي فإن $OG=8R$

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=-2mg.OG\sin\theta\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=-16mgR\sin\theta$$

وبالتالي : $16mgR\sin\theta+J_{\Delta}\ddot{\theta}=0\Rightarrow \ddot{\theta}+\dfrac{16mgR}{J_{\Delta}}\sin\theta=0$

بما أن $\theta_m=10°$ فإن $\sin\theta\approx\theta$ أي أن $\ddot{\theta}+\dfrac{16mgR}{J_{\Delta}}\theta=0$

طبيعة حركة المجموعة دورانية جيبية بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها المعادلة ذات الشكل التالي $\theta(t)=\theta_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$.

دورها الخاص يكتب على الشكل التالي : $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{J_{\Delta}}{16mgR}}=1s$

2 ـ المعادلة الزمنية لحركة المجموعة (S) هي :

$\theta(t)=\theta_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ بحيث أن $\theta_m=10°=\dfrac{\pi}{18}rad$

عند اللحظة $t=0$ لدينا $\theta(0)=\theta_m=\theta_m\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$

$$\theta(t)=\frac{\pi}{18}\cos(2\pi t)$$

5 ـ الطاقة الحركية للمجموعة بدلالة الزمن t

$$E_C=\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2\Rightarrow E_C=\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_0^{\,2}\theta_m^{\,2}\sin^2(2\pi)$$

تكون الطاقة E_C قصوية

$$-1 \le \sin(2\pi t) \le 1 \Rightarrow \sin^2(2\pi t) \le 1$$
$$\frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t) \le \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$$
$$E_C \le \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$$

إذن القيمة القصوية للطاقة الحركية هي : $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$

تطبيق عددي : $E_{Cmax}=6.10^{-3}J$

6 ـ نستنتج تعبير طاقة الوضع التقالية للمجموعة S :

بما أن الاحتكاكات مهملة نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين وهما الموضع التوازن الذي تمر منه المجموعة وتكون هنا السرعة قصوية أي أن الطاقة الميكانيكية قصوية $E_{C\max} = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$ ونعتبر أن طاقة الوضع منعدمة أي أن $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$. و موضع ثاني في اللحظة t أي أن الطاقة الميكانيكية هي $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p$

انحفاظ الطاقة الميكانيكية $\frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$

$$E_p = \frac{1}{2}J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \left(1-\sin^2(\omega_0 t)\right)$$
$$E_p = E_{C\max}\cos^2(2\pi t)$$

تمرين 3

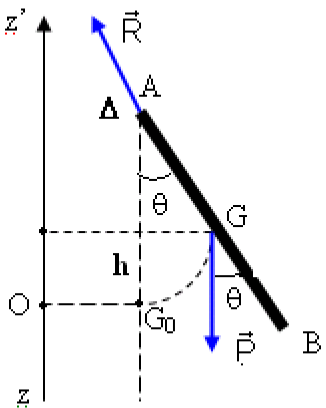
I ـ الدراسة التحريكية

1 ــ المعادلة التفاضلية

القوى المطبقة على الساق $\vec{P}$ و $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الساق :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$
$$-Mg\frac{L}{2}\sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_\Delta}\sin\theta = 0$$



حسب شكل المعادلة التفاضلية فهي ليست خطية إذن فحركة الساق حركة تذبذبية

2 ـ المعادلة التفاضلية في حالة تذبذبات ذات وسع صغير حسب قانون التواقت (لا يتعلق دور حركة النواس بوسع الذبذبات في حالة الذبذبات ذات وسع صغير)

في حالة تذبذبات ذات وسع صغير $\theta_m = \frac{\pi}{10}rad$ نعتبر أن $\sin\theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_\Delta}\theta = 0$ بما أن $J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2$ إذن فالمعادلة التفاضلية هي $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$

3 ـ حساب قيمة الدور :

حسب المعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير فإن حركة النواس حركة تذبذبية جيبية دورها الخاص $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$ تطبيق عددي : $T_0 = 1,26s$

II ـ الدراسة الطاقية

1 ـ نبين العلاقة

نعلم أن طاقة الوضع الثقالية هي : $E_p = Mgz + C$ حسب الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية وحسب الشكل جانبه

$E_p = 0$ بالنسبة $z = 0$ إذن $C = 0$ وطاقة الوضع تكتب على الشكل التالي $E_p = Mgz$ بحيث أن

$$z = \frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

ومنه $E_p = \frac{MgL(1-\cos\theta)}{2}$

2 ـ أ

الحالة الأولى : عند مرور الساق من موضع توازنها . فحسب الشكل $\boldsymbol{\theta = 0}$ و $\boldsymbol{E_m = E_C = 0,5J}$ و $\boldsymbol{E_p = 0}$

$$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^{\,2} = 0,5 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2\times 0,5}{J_\Delta}} = 5,77\,rad/s$$

ب ـ موضع الساق عندما تكون $\boldsymbol{E_C = 0,25J}$ أي أن

$E_m = E_p + E_C \Rightarrow E_P = E_m - E_C = 0,5 - 0,25 = 0,25J$ فحسب الشكل $\boldsymbol{\theta = \pm\frac{\pi}{3}rad}$

الحالة الثانية :

عندما تكون $\boldsymbol{E_m > E_p \Rightarrow E_c \neq 0}$ مهما كانت t أي أن الساق ستدور حول المحور Δ .

- القيمة القصوية والقيمة الدنوية للسرعة الزاوية $\dot{\theta}$

تكون السرعة الزاوية قصوية عندما تكون الطاقة الحركية E_C قصوية ونرمز لها ب $E_{C\max}$ حيث تكون طاقة الوضع ذنوية وحسب المبيان أن طاقة الوضع الدنوية عندما تكون $\theta = 0$ أي $E_{p\min} = 0$ وفي هذه الحالة $E_m = E_{C\max} = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2_{\max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}}$

لدينا $J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2 = 3.10^{-2}kg.m^2$ وأن E_m حسب الشكل هي : $E_m = 1,5J$

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}} = 10,8\,rad/s$$

تكون السرعة الزاوية دنوية عندما تكون الطاقة الحركية دنوية $E_{C\min}$ وتكون طاقة الوضع قصوية وفي هذه الحالة

$$E_m = E_{c\min} + E_{p\max} \Rightarrow E_{C\min} = E_m - E_{p\max}$$

أي أن $\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2_{\min} = E_m - E_{p\max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p\max})}{J_\Delta}}$

حسب المبيان لدينا :

$E_m = 1,75J$ و $E_{p\max} = 1,5J$ وبالتالي : $\dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\dfrac{2\left(E_m - E_{p\max}\right)}{J_\Delta}} = 4,08 rad/s$

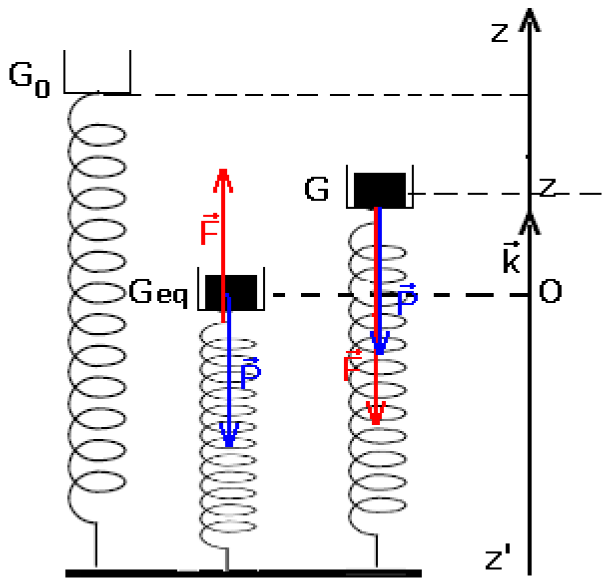
تمرين 4

نعتبر أن النابض عندما يكون لا مطال ولا مكبوس وتوجد فوقه الكفة P أن طوله هو ℓ_0 عند وضع الجسم (S) فوق الكفة يصبح طول النابض ℓ_1 ويعتبر هذا الموضع موضع التوازن المستقر حيث نعتبره أصل المحور الرأسي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى .

1 **ـ عند التوازن القوى المطبقة على المجموعة**

$\vec{P}$ و $\vec{F}$ نطبق شرط التوازن في المركز G

$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ ونسقط هذه العلاقة على المحور Oz



$$\vec{P} - k\overrightarrow{G_0G_{eq}} = \vec{0}$$

$$-(m_1 + m_2)g + k\left|\Delta\ell\right| = 0$$

$$\left|\Delta\ell\right| = \frac{(m_1 + m_2)g}{K}$$

$$\left|\Delta\ell\right| = 1cm$$

2 ـ1 المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على المجموعة

$$\vec{F} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$-k\overrightarrow{G_0G} + \vec{P} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{a} \Rightarrow -k\left(\overrightarrow{G_0G_{eq}} + \overrightarrow{G_{eq}G}\right) + \vec{P} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{a}$$

$$-k\overrightarrow{G_0G_{eq}} - k\overrightarrow{G_{eq}G} + \vec{P} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{a}$$

حسب السؤال السابق لدينا $\vec{P} - k\overrightarrow{G_0G_{eq}} = \vec{0}$

أي أن $-k\overrightarrow{G_{eq}G} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{a}$

نسقط هذه العلاقة المتجهية على Oz : $-kz = (m_1 + m_2)\ddot{z}$

إذن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة هي : $\ddot{z} + \dfrac{k}{m_1 + m_2}z = 0$

نستنتج الدور الخاص للحركة : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2)}{k}}$

حساب T_0 :

$$T_0 = 0,2s$$

2 ـ 2 المعادلة الزمنية لحركة المجموعة :

حركة G حركة تذبذبية فمعادلتها الزمنية والتي هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة هي :

تحديد الطور عند اللحظة t=0

$$z(0)=Z_m\cos\varphi \Rightarrow 0,2=Z_m\cos\varphi$$

بالنسبة للسرعة عند اللحظة t=0

$$\dot{z}(t)=-Z_m\frac{2\pi}{T_0}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$t=0 \Leftrightarrow \dot{z}(0)=-Z_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\varphi$$

وحسب المعطيات أن $\dot{z}(0)<0$ إذن $\dot{z}(0)=-1,2=-Z_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\varphi$

من المعادلتين نستنتج :

$$\begin{cases} 0,2=Z_m\cos\varphi \\ 1,2=Z_m 10\pi\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0,2}{Z_m}=\cos\varphi \\ \dfrac{1,2}{10\pi Z_m}=\sin\varphi \end{cases}$$

$Z_m=0,203m$ و بالنسبة ل $\cos\varphi=\frac{0,200}{0,203}\Rightarrow \varphi=10°=\frac{\pi}{18}rad$

$$z(t)=0,2\cos(10\pi t+\frac{\pi}{18})$$

3 **<u>ـ نختار أصل لمعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية</u>** :

نحن بصدد اختيار Oz موجه نحو الأعلى إذن $E_p(t)=(m_1+m_2)gz(t)+C$ بما أنه الحالة المرجعية تم اختيارها في المستوى حيث $z=0$ فإن $C=0$

طاقة الوضع المرنة حسب التعريف $E_p=\frac{1}{2}ka^2+Cte$ حيث a إطالة النابض

بحيث أن $a=|\Delta\ell|-z$ ونختار كحالة مرجعية z=0 إذن $0=\frac{1}{2}k\Delta\ell^2+Cte \Rightarrow Cte=-\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$

$E_p(t)=\frac{1}{2}k(|\Delta\ell|-z)^2-\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ عند نشر هذه العلاقة نحصل على $E_p(t)=\frac{1}{2}kz^2-k|\Delta\ell|z$

إذن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m(t)=E_p(t)+E_c(t)$$

$E_p(t)$ طاقة الوضع الكلية للمجموعة و $E_c(t)$ الطاقة الحركية للمجموعة .

$$E_m(t)=\frac{1}{2}kz^2-k|\Delta\ell|z+(m_1+m_2)gz+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}^2$$

نعلم أنه عند التوازن $-(m_1+m_2)g+k|\Delta\ell|=0$

إذن $E_m(t)=\frac{1}{2}kz^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}^2$

نستنتج المعادلة التفاضلية للحركة نعلم أن الحركة تتم بدون احتكاك إذن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{dE_m(t)}{dt}=0 \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{z}+kz=0$$

$$\ddot{z}=-\frac{k}{(m_1+m_2)}z$$

$$\ddot{z}+\frac{k}{(m_1+m_2)}z=0$$

3 ـ 2 السرعة V التي ستمر بها المجموعة من النقطة O لأول مرة .

نطبق مبدا انحفاظ الطاقة الميكانيكية عند انتقال الجسم من الموضع ذي الأنسوب $z=_m$ و $z=0$

$$\frac{1}{2}kZ_m{}^2+0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+0$$

يعني أن $V=\sqrt{\frac{kZ_m{}^2}{m_1+m_2}}$ تطبيق عددي V=1,2m/s

نبين أن المجموعة ممكن أن تتذبذب بوسع $z_i>z$ دون أن يغادر الجسم الكفة :

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S الموضوع على الكفة $\vec{P}+\vec{R}=(m_1+m_2)\vec{a}$

إسقاط العلاقة على Oz $-(m_1+m_2)g+R=(m_1+m_2)\ddot{z}$ حسب الدراسة السابقة

$$\ddot{z}=-\frac{k}{m_1+m_2}z$$

نعوض $\ddot{z}$ في العلاقة

$$-(m_1+m_2)g+R=-(m_1+m_2)\frac{k}{m_1+m_2}$$

$$R=(m_1+m_2)g-kz$$

لكي لايغادر الجسم الكفة يجب أن تكون $R>0$ هذا يعني أن $z_i<\frac{(m_1+m_2)g}{k}$

نضع $Z_m=\frac{(m_1+m_2)g}{k}$ لكي يبقى الجسم في حركة تذبذب حول O يجب $z_i<Z_m \Rightarrow z_i<1cm$

مما يبين أن دراستنا النظرية لايمكن أن توافق ما هو تجريبي وهذا ما سنتطرق إليه في الجزء الثاني

4 ـ تعبيري Z_{max} و z_{max}

نطبق انخفاض الطاقة الميكانيكية قبل الانفصال وبعد الانفصال .

بالنسبة للجسم : قبل الانفصال : $E_m=\frac{1}{2}m_1V^2+0$

بعد الانفصال : $E'_m=0+m_1gz_{max}$

$E_m=E'_m \Rightarrow z_{max}=\frac{V^2}{2g}$ تطبيق عددي z_{max}=7,2cm

بالنسبة للنابض والكفة

مباشرة قبل الإنفصال : $E_m=\frac{1}{2}m_2V^2+0+0$

بعد الانفصال $E'_m = \frac{1}{2}kZ_{\max}{}^2 + m_2 gZ_{\max}$

$E_m = E'_m \Rightarrow Z_{\max}{}^2 + 2m_2 gZ_{\max} - m_2 V^2 = 0$

معادلة من الدرجة الثانية $Z_m{}^2 + 4Z_m - 0,29 = 0$

نحتفظ بالحل الموجب $Z_{\max} = 0,07m$

تمرين 5

1 ـ طبيعة حركة القرص :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على القرص له حركة دوران حول محور يجسده السلك

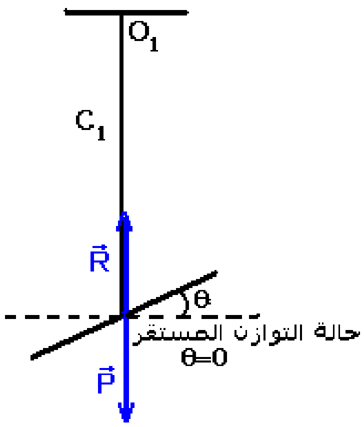
جرد القوى المطبقة على السلك :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك .

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_\Delta\ddot{\theta}$ لدينا $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ أي أن $\mathcal{M}_C = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية التالية : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$ خطية حلها جيبي وبالتالي فطبيعة حركة القرص حركة دورانية جيبية .

دورها هو : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$



2 ـ حساب ثابتة اللي بالنسبة ل $T_0 = 0,92s$:

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{J_\Delta}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2} = 0,233.10^{-2}\,N.m.rad^{-1}$$

3 ـ طبيعة حركة النواس الجديد :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على النواس الجديد :

جرد القوى المطبقة على النواس الجديد :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (1) ومزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (2) .

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta\ddot{\theta}$ وبما أن $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ و

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ فإن $\mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta\ddot{\theta}$

بحيث أن $\mathcal{M}_{C1} = -C_1\theta$ و $\mathcal{M}_{C2} = -C_2.\theta$.

حسب المعطيات لدينا أن C_1 تتناسب عكسيا مع طول السلك ، أي أن $C_1 = \frac{K}{L-z}$ و $C_2 = \frac{K}{z}$ أي أن

ثابتة اللي للسلك الذي طوله L كذلك تتناسب عكسيا مع الطول : $C = \frac{K}{L}$

نعوض C_1 و C_2 في المعادلة $-C_1\theta - C_2\theta = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow -(C_1 + C_2)\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$ ، $-K\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$

لدينا كذلك : $K = C.L$ أي

$$-C.L\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{L^2}{z(L-z)}C = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2.C}{z(L-z).J_\Delta}\theta = 0$$

ب ـ تعبير الدور T'_0 :

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{z(L-z).J_\Delta}{L^2.C}} = \frac{T_0}{L}\sqrt{z(L-z)}$$

حساب T_0' في حالة $z = \frac{L}{3}$

$$T_0' = \frac{T_0}{L}\sqrt{\frac{L}{3}\left(\frac{2L}{3}\right)} = \frac{T_0}{3}\sqrt{2} = 0,43s$$

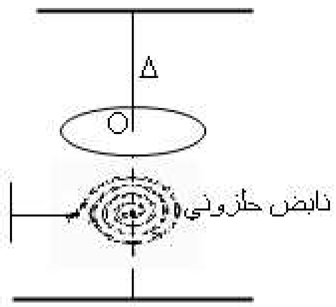
ج ـ لنبين أن T_0' تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل $z = z_{\max}$

نحسب المشتقة الأولى ل T_0' :

$\frac{dT_0'}{dt} = \frac{T_0(L-2z)}{2L\sqrt{z(L-z)}} = 0 \Rightarrow L-2z = 0$ وبالتالي فإن T_0' تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل $z = \frac{L}{2}$

في هذه الحالة تكون $T'_{0\max} = \frac{T_0}{2} = 0,46s$

تمرين6



1 ـ السرعة الزاوية القصوية للرقاص :

طاقة الوضع للي بالنسبة للنابض الحلزوني $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ نختار كحالة مرجعية الحالة التي يكون فيها النابض غير مشوه ، عند موضع التوازن $\theta = 0$ يكون النابض غير مشوه $E_p = 0$ أي أن $Cte = 0$ و

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$$

نعلم أن الرقاص يأخذ سرعة قصوية عند مروره بموضع توازنه . كما أنه عند حركة النواس هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي : $E_m(0) = E_m(equilibre)$ بحيث أن $E_m(0) = E_p(0) + E_C(0)$ الطاقة الميكانيكية عند انطلاق الرقاص بدون سرعة بدئية $E_C(0) = 0$ و $E_p(0) = \frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2}$ يعني أن

$$(1)\ E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2}$$

عند مروره من موضع توازنه $E_p = 0$ و $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2{}_{max}$ يعني أن $(2)\ E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_{max}^{\ 2}$

من العلاقتين (1) و(2) نستنتج $\frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2} = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2{}_{max} \Rightarrow \dot{\theta}_{max} = \theta_m\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}_{max} = 1,66rad/s$

2 ـ حساب طاقة الوضع والطاقة الحركية للنواس

نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين مثلا عند مروره من موضع التوازن وموضع في اللحظة

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_{max}{}^{2}=\frac{1}{2}C\theta^{2}+E_{C}(t)\Rightarrow E_{C}(t)=\frac{1}{2}C\theta_{m}{}^{2}-\frac{C\theta_{m}{}^{2}}{8}$$

$$E_{C}(t)=\frac{3C\theta_{m}{}^{2}}{8}$$

حساب طاقة الوضع : $E_{p}=\frac{1}{2}C\theta^{2}\Rightarrow E_{p}=\frac{C\theta_{m}{}^{2}}{8}$

تطبيق عددي : $E_{C}=0,042.10^{-4}J$ و $E_{p}=0,014.10^{-4}J$

تمرين 7

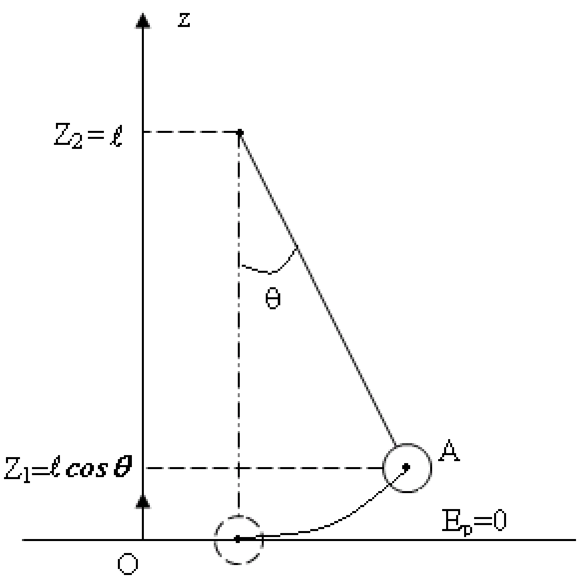
1 ــ أ ـ نطبق العلاقة الأساسية على الجسم A : $\sum\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{i})=J_{\Delta}\ddot{\theta}$

جرد القوى المطبقة على الجسم A :

$\vec{P}$ وزن الجسم A

$\vec{T}$ توتر القضيب

$\vec{R}$ تأثير المحور على القضيب .



$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})+\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R})+\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T})=J_{\Delta}\ddot{\theta}$ وبما أن خط تأثير القوة $\vec{T}$ والقوة $\vec{R}$ يتقاطعا مع المحور Δ فإن عزمهما منعدم . أي أن $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})=J_{\Delta}\ddot{\theta}$

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})=-mgd$ بحيث أن $d=l\sin\theta$ إذن

$$-mg\ell\sin\theta=J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

ونستنتج المعادلة التفاضلية لحركة الجسم A

$\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{J_{\Delta}}\sin\theta=0$ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير في هذه الحالة الدور الخاص لا يتعلق بوسع الذبذبات : $\sin\theta\approx\theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{m\ell^{2}}\theta=0\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

يتبين من المعادلة التفاضلية أن حركة A حركة دائرية جيبية .

ب ــ تعبير الدور T_0 لهذا النواس : $T_{0}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ حساب الدور T : $T_{0}=0,4\pi s=1,26s$

2 ــ أ البرهان على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للقضيب :

$$E_{C}=E_{C}(tige)+E_{C}(A)+E_{C}(terre)$$

$$E_{C}=\frac{1}{2}J'_{\Delta}\dot{\theta}^{2}+\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^{2}+0$$

نعلم أن كتلة القضيب مهملة بالنسبة لكتلة الجسم إذن فعزم قصوره منعدم في هذه الحالة لأن كتلة المجموعة مركزة في الجسم A إذن الطاقة الحركية للمجموعة : $E_{C}=E_{C}(A)$

ب ـ تعبير الطاقة الحركية للمجموعة : $E_C = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

ج ـ طاقة الوضع الثقالية للمجموعة :

حسب تعريف طاقة الوضع الثقالية : $E_p = mgz + cte$ نختار Oz موجه نحو الأعلى أي أن

$$z = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$E_p = mg\ell(1-\cos\theta)$ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير فإن $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ وفي هذه الحالة

تكون طاقة الوضع على الشكل التالي :

$$E_p = mg\ell\frac{\theta^2}{2}$$

د ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

$$E_m = E_c + E_p$$

بما أننا بصدد حركة تذبذبية جيبية فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

نعوض في المعادلة للطاقة الميكانيكية :

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta_m{}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2}mgl\theta_m{}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

حسب المعادلة التفاضلية عندنا $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\frac{g}{l}\theta_m{}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2}mgl\theta_m{}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$= \frac{1}{2}ml\theta_m{}^2\left(\sin^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}ml\theta_m{}^2$$

نستنتج أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية نظرا لأن $E_m = Cte$

3 ـ 1 ـ نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين الوضع المستقر والوضع التي تكون فيه الزاوية قصوية α_m

$$-\frac{1}{2}mv_A{}^2 = -mgl\left(1-\cos\alpha_m\right)$$

$$mv_A{}^2 = 2mgl - 2mgl\cos\alpha_m$$

$$\cos\alpha_m = 1-\frac{v_A{}^2}{2gl}$$

تطبيق عددي نجد $\alpha_m = \frac{\pi}{3}$

أ ــ السرعة الدنوية التي يجب إعطاؤها للجسم A لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر :

وضع التوازن غير المستقر : $\alpha_m = \pi$ أي أن $\cos\alpha_m = -1$ يعني أن $v'_A = 2\sqrt{gl}$

تطبيق عددي $v'_A = 4m/s$

ب ــ حركة القضيب ستكون في هذه الحالة حركة دورا نية حول المحور Δ أي مسار الكرة مسار دائري مركزه النقطة التي يمر منها المحور Δ .