تصحيح وطني 2019

الدورة الاستدراكية - علوم تجريبية

التمرين الأول (3 نقاط) :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1,2,2)$ و $B(3,-1,6)$ و $C(1,1,3)$	
1) أ) تحقق أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$	0.75
ب) استنتج أن $x-2y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0.5
2) نعتبر النقطتين $E(5,1,4)$ و $F(-1,1,12)$ و (S) مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$ بين أن المجموعة (S) فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2,1,8)$ و شعاعها $R=5$	0.75
3) أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)	0.5
ب) استنتج أن المستوى ABC يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=4$	0.5

التمرين الثاني (3 نقاط) :

1) أ) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$	0.75
ب) نضع $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أكتب a على الشكل المثلثي	0.5
2) نعتبر العدد العقدي $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ، تحقق أن $b^2=i$	0.5
3) نضع $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ، بين أن $h^4+1=a$	0.5
4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطة B التي لحقها b و R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ) ليكن c لحق النقطة C صورة النقطة B بالدوران R ، بين أن $c=ib$	0.5
ب) استنتج طبيعة المثلث OBC	0.25

التمرين الثالث (3 نقاط) :

يحتوي صندوق على كرة واحدة حمراء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق . لتكن الأحداث التالية : A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة " و C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "	
1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{8}{27}$	2

2) أحسب $p(C)$	1

المسألة (11 نقطة) :

<u>الجزء الأول:</u>	
لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=2+8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4}$	
و C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$)	
1) أ) تحقق أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و أول النتيجة هندسيا	0.5
ب) تحقق أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا	0.5
2) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	0.5
ب) بين أن المنحنى C يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$	0.5
3) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$	0.75
ب) تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$، $x^2-2x+4>0$	0.25
ج) بين أن f تناقصية قطعا على المجال $0,2$ و تزايدية قطعا على كل من المجالين $-\infty,0$ و $2,+\infty$	0.75
د) ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$	0.5
4) أنشئ المنحنى C في المعلم $O,\vec{i},\vec{j}$	1
5) أ) تحقق أن الدالة $H:x\mapsto\frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $2,4$	0.5
ب) تحقق من أن $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$	0.25
ج) أحسب التكامل $\int_2^4 e^{x-4}dx$	0.5
د) أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى C و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=4$	0.75
<u>الجزء الثاني:</u>	
1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $2,4$ بما يلي : $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$	
أ) أحسب $g(4)$	0.25
ب) تحقق أن لكل x من المجال $2,4$ ، $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$	0.5
ج) تحقق أن لكل x من المجال $2,4$ ، $e^{x-4}-1\leq 0$ ثم استنتج أن لكل x من المجال $2,4$: $g(x)\leq 0$	0.5
2) أ) تحقق أن لكل x من المجال $2,4$ ، $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$	0.5
ب) استنتج أن لكل x من المجال $2,4$ ، $f(x)\leq x$	0.25

3) لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = f\ u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 4$	0.5
ب) حدد رتابة المتتالية u_n ، ثم استنتج أنها متقاربة	0.5
ج) أحسب نهاية المتتالية u_n	0.75

تصحيح التمرين الأول

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}\ 2,-3,4$ و $\overrightarrow{AC}\ 0,-1,1$

إذن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= 1.\vec{i} - 2.\vec{j} - 2.\vec{k}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

ب) لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ 1,-2,-2$ متجهة منظمية للمستوى ABC

إذن معادلة ديكارتية للمستوى ABC تكتب على شكل : $1.x - 2.y - 2.z + d = 0$

و لدينا : $A\ 1,2,2 \in ABC$

إذن : $1.\ 1\ - 2.\ 2\ - 2.\ 2\ + d = 0$

و منه : $d = 7$

نستنتج أن $x - 2y - 2z + 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى ABC

2) لدينا S مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$

إذن S هي الفلكة التي أحد أقطارها EF

و بالتالي : Ω مركز الفلكة هو منتصف القطعة EF و شعاعها R : $R = \dfrac{EF}{2}$

$$\begin{cases} x_\Omega = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{5+(-1)}{2} = 2\\ y_\Omega = \dfrac{y_E + y_F}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1\\ z_\Omega = \dfrac{z_E + z_F}{2} = \dfrac{4+12}{2} = 8\end{cases}$$

و $R=\dfrac{EF}{2}=\dfrac{\sqrt{(-1-5)^2+(1-1)^2+(12-4)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{36+0+64}}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

و منه : المجموعة S فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2,1,8)$ و شعاعها $R=5$

3) أ) $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2-2(1)-2(8)+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=3$

ب) بما أن $d(\Omega,(ABC))<R$ فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة S وفق دائرة Γ شعاعها r

حيث : $r=\sqrt{R^2-(d(\Omega,(ABC)))^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

تصحيح التمرين الثاني

1) أ) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$

لدينا : $\Delta=(-3)^2-4(1)(3)=-3$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$z=\dfrac{-(-3)-i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أو $z=\dfrac{-(-3)+i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

و منه : $S=\left\{\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ب) لدينا : $a=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

معيار العدد a هو : $|a|=\left|\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$

لنكتب العدد a على الشكل المثلثي:

$$a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

2) $b^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1+i)^2=\dfrac{2}{4}(1+2i-1)=\dfrac{4i}{4}=i$

3) حسب علاقة موافر :

$$h^4=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4=\cos\frac{4\pi}{12}+i\sin\frac{4\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن : $h^4+1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=a$

4) أ) لدينا $\frac{\pi}{2}$: c C صورة النقطة b B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned} c-0 &= e^{i\frac{\pi}{2}}\ b-0 \\ c &= \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).b \end{aligned}$$

و منه : $c=ib$

ب) لدينا : $R\ \ B\ =C \Leftrightarrow \begin{cases} OB=OC \\ \overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}} \equiv \frac{\pi}{2}\ 2\pi \end{cases}$

إذن المثلث OBC متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تصحيح التمرين الثالث

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق ."

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\Omega=6^3=216$

1) A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

BBB أو NN N RRR

$$cardA=1^3+2^3+3^3=36$$

$$p\ \ A\ =\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$$

B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة "

$\overline{B}\overline{B}\overline{B}$

$$cardB=4^3=64$$

$$p\ \ B\ =\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{64}{216}=\frac{8}{27}$$

2) C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "

$$\begin{cases} BB\overline{B} \\ B\overline{B}B \\ \overline{B}BB \end{cases}$$

$$cardC = \frac{3!}{2!\times 1!}\ 2^2\times 4^1\ = 48$$

$$p\ \ C\ = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

تصحيح المسألة

الجزء الأول:

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ \ x\ = \lim\limits_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = 2$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-4} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^4} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to0} f\ \ x\ = \lim\limits_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2\ ^2}{x^2} = +\infty \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to0}\ x-2\ ^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x\to0} e^{x-4} = \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{e^4} = \frac{1}{e^4} \end{cases}$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ \ x\ = \lim\limits_{x\to+\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^4} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\ \ x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\frac{e^{x-4}}{x} = +\infty$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-4}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^4}\dfrac{e^x}{x} = +\infty \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty\right) \end{cases}$$

التأويل الهندسي:

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

فإن : المنحنى C يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\ &= 0+8\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\ &= 8\left(\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\right)' e^{x-4} + \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \left(e^{x-4}\right)'\right) \\ &= 8\left(2\left(\frac{x-2}{x}\right)'\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4} + \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 (x-4)' e^{x-4}\right) \\ &= 8\left(2\times\frac{2}{x^2}\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4} + \frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}\right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4}{x}+x-2\right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4+x^2-2x}{x}\right) \end{aligned}$$

و منه لكل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$

ب) ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $x^2-2x+4 = x^2-2x+1+3 = (x-1)^2+3$

إذن من الواضح أن : لكل x من $\mathbb{R}$ ، $x^2-2x+4>0$

ج) ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:

لدينا $f'(x)=\dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}=\dfrac{8(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^2}\times\dfrac{x-2}{x}$

بما أن : $\dfrac{8(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^2}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\dfrac{x-2}{x}$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{x}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

✓ على المجال $]0,2]$: لدينا $f'(x)\leq 0$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

إذن f تناقصية قطعا

✓ على المجال $[2,+\infty[$: لدينا $f'(x)\geq 0$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

إذن f تزايدية قطعا

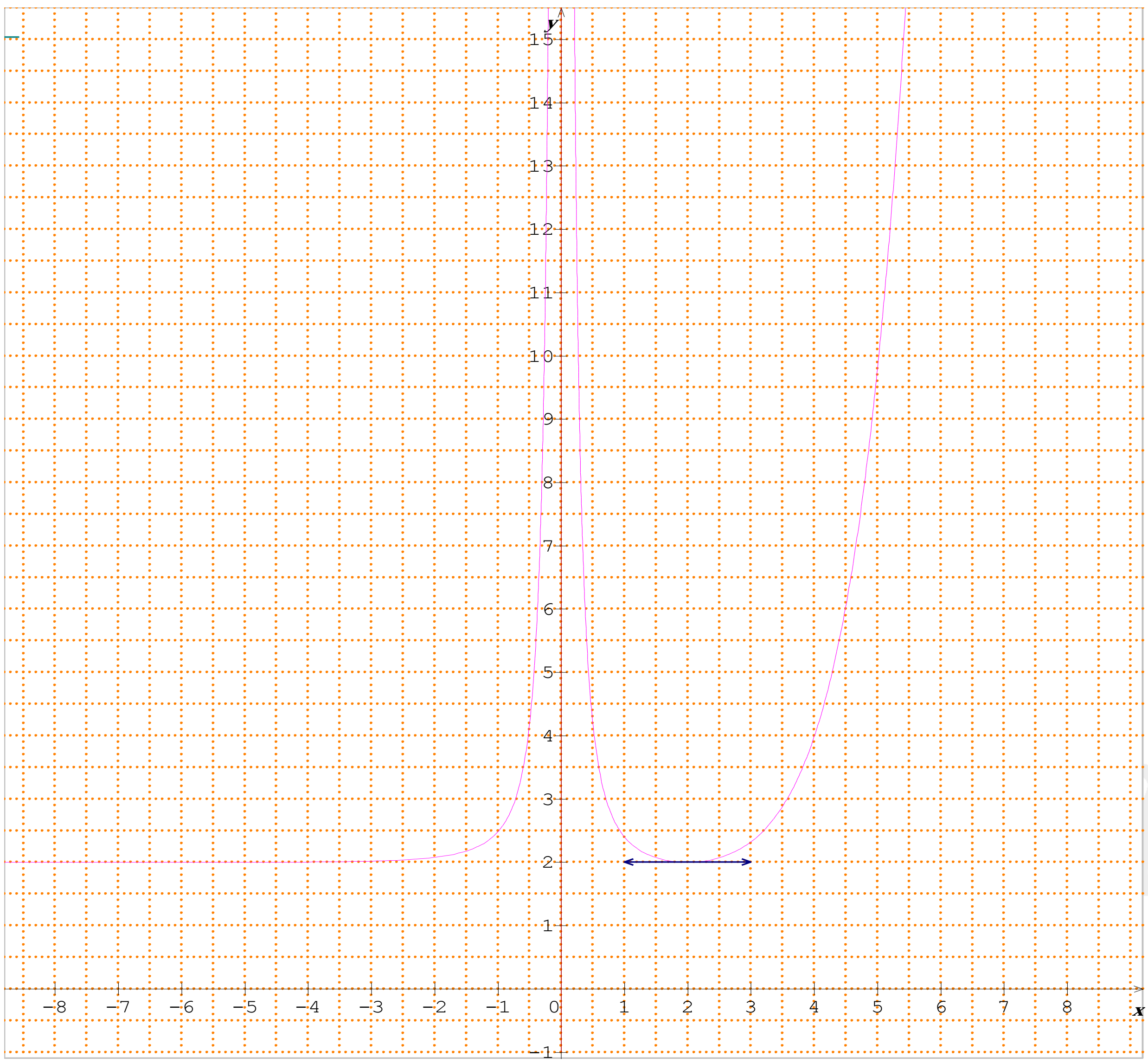
✓ على المجال $]-\infty,0[$: لدينا $f'(x)>0$

إذن f تزايدية قطعا

د) جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4)



5) أ)

✓ الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ قابلة للاشتقاق على المجال $2,4$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $2,4$

✓ ليكن $x \in 2,4$

لدينا

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \left(\frac{1}{x}e^{x-4}\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)' e^{x-4} + \frac{1}{x}\left(e^{x-4}\right)' \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}(x-4)' e^{x-4} \\
&= \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4} \\
&= \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^{x-4} \\
&= \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{x-4}
\end{aligned}$$

إذن $\forall x \in [2,4] \quad H'(x) = h(x)$

وبالتالي : الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $[2,4]$

ب)

$$\begin{aligned}
2+8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4} &= 2+8e^{x-4}\left(1-4\frac{x-1}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{(x-2)^2}{x^2}\right) \\
&= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned}
\int_2^4 e^{x-4}dx &= \int_2^4 (x-4)' e^{x-4}dx \\
&= \left[e^{x-4}\right]_2^4 \\
&= e^0 - e^{-2} \\
&= 1 - \frac{1}{e^2} \\
&= \frac{e^2-1}{e^2}
\end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned}
A &= \int_2^4 |f(x)|\,dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_2^4 f(x)\,dx \times 1cm \times 1cm \qquad \forall x \in [2;4] \quad f(x) \geq 0 \\
&= \int_2^4 \left(2 + 8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}\right) dx.\mathrm{cm}^2 \\
&= \left(\int_2^4 2dx + 8\int_2^4 e^{x-4}dx - 32\int_2^4 \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}dx\right).cm^2 \\
&= \left([2x]_2^4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32[H(x)]_2^4\right).cm^2 \\
&= \left((8-4) + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2}\right)\right).cm^2 \\
&= \left(4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 8 + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(-4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(\frac{-4e^2 + 8e^2 - 8 + 16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \frac{4e^2+8}{e^2}.cm^2
\end{aligned}$$

<u>الجزء الثاني:</u>

1) أ)

$$\begin{aligned}
g(4) &= 8 \times 2e^0 - (4)^2 \\
&= 16 - 16 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ب)

ليكن $x \in [2,4]$

لدينا :

$$\begin{aligned}
-(x-4)^2 e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1) &= (-x^2 + 8x - 16)e^{x-4} + x^2e^{x-4} - x^2 \\
&= (-x^2 + 8x - 16 + x^2)e^{x-4} - x^2 \\
&= 8(x-2)e^{x-4} - x^2 \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من المجال $[2,4]$ ، $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2\left(e^{x-4}-1\right)$

ج)

ليكن $x\in[2,4]$

✓ لدينا $2\leq x\leq 4$

إذن $-2\leq x-4\leq 0$

إذن $e^{x-4}\leq e^0$

إذن $e^{x-4}\leq 1$

و منه لكل x من المجال $[2,4]$ ، $e^{x-4}-1\leq 0$

✓ لدينا $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2\left(e^{x-4}-1\right)$

بما أن $-(x-4)^2e^{x-4}\leq 0$ و $x^2\left(e^{x-4}-1\right)\leq 0$

فإن $-(x-4)^2e^{x-4}+x^2\left(e^{x-4}-1\right)\leq 0$

و منه لكل x من المجال $[2,4]$: $g(x)\leq 0$

2) أ) ليكن $x\in[2,4]$

لدينا

$$\begin{aligned} f(x)-x &= 2+8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}-x \\ &= 8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}-(x-2) \\ &= \frac{x-2}{x^2}\left(8(x-2)e^{x-4}-x^2\right) \\ &= \frac{x-2}{x^2}g(x) \end{aligned}$$

إذن لكل x من المجال $[2,4]$ ، $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

ب) ليكن $x\in[2,4]$

لدينا $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

نعلم أن $x^2>0$ و $x-2\geq 0$ و $g(x)\leq 0$

إذن $\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)\leq 0$

إذن $f(x)-x\leq 0$

و منه لكل x من المجال $[2,4]$ ، $f(x)\leq x$

3) أ) لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2\leq u_n\leq 4$

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0=3$

إذن $2\leq u_0\leq 4$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $2\leq u_n\leq 4$

▷ و نبين أن : $2\leq u_{n+1}\leq 4$

حسب الافتراض لدينا $2\leq u_n\leq 4$

و بما أن f متصلة و تزايدية على المجال $[2,4]$

فإن $f(2)\leq f(u_n)\leq f(4)$

إذن $2\leq u_{n+1}\leq 4$

✓ نستنتج : أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2\leq u_n\leq 4$

ب)

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

نعلم أن لكل x من المجال $[2,4]$ ، $f(x)\leq x$

و بما أن $2\leq u_n\leq 4$ فإن $f(u_n)\leq u_n$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}\leq u_n$

و منه المتتالية (u_n) تناقصية

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فإن (u_n) متقاربة

ج) لدينا $u_0=3\in[2;4]$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ f متصلة على المجال $[2,4]$

✓ $f([2,4])=[f(2);f(4)]=[2;4]$

✓ (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x)=x$

$$f(x)=x \Leftrightarrow (x-2)g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ أو } g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ أو } x=4$$

بما أن (u_n) تناقصية فإن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n\leq u_0$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n \leq 3$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq 3$

و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$