.01

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر المستوى (P) المار من النقطة $A(0,1,1)$ و $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$.

.01

أ- نبين أن : $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

طريقة 1 :

بما أن : المستوى (P) المار من النقطة $A(0,1,1)$ و $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية عليه فإن :

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x\times1+(y-1)\times0+(z-1)\times(-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x-z+1=0$$

خلاصة: $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

طريقة 2 :

- المتجهة $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية ل (P) إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $1x+0y-1z+d=0$.
- النقطة $A(0,1,1)\in(P)$ فإن : $1\times0+0\times1-1+d=0$ و منه : $d=1$.

خلاصة: $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

ب- نبين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و نتحقق بأن النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس .

- نبين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S)

لهذا نحسب $d(\Omega,(P))$ المسافة بين النقطة Ω مركز الفلكة و المستوى (P) .

لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|0+0+1+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

ونعلم أن شعاع الفلكة (S) هو $r=\sqrt{2}$ ومنه $d(\Omega,(P))=r$.

خلاصة 1 : المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

- نتحقق بأن النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس .

لهذا نبين أن $B\in(S)\cap(P)$ أي نبين أن : $B\in(S)$ (أي $\Omega B=\sqrt{2}$) و نبين أن $B\in(P)$.

- $\overrightarrow{\Omega B}(-1,0,1)$ ومنه $\Omega B=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ و منه $B\in(S)$.
- لدينا : $1\times(-1)+0\times1-1\times0+1=0$ إذن : $B\in(P)$

و منه : $B\in(S)\cap(P)$.

خلاصة 2 : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس .

02. ..

أ- نحدد تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P) .

✓ لدينا المتجهة : $\vec{u}(1,0,-1)$ موجهة ل (Δ) لأنها منظمية على المستوى (P) و $A(0,1,1)\in(\Delta)$

✓ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; $(\Delta)\ :\ \begin{cases} x=0+1\times t=t \\ y=1+0\times t=1 \\ z=1-1\times t=1-t \end{cases}$

خلاصة : تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; $(\Delta)\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$.

ب- نبين أن : المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$.

✓ نحدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) : $(S):(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\sqrt{2}^2=2$.

✓ نحدد تقاطع الفلكة (S) و المستقيم (Δ) .

لدينا :

$$M(x,y,z)\in(S)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases} M\in(S) \\ M\in(\Delta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2-2=0 \\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} t^2+(1-1)^2+(1-t+1)^2-2=0 \\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2t^2-4t+2=2(t-1)^2=0 \\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} t=1 \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \end{cases}$$

و منه : المستقيم (Δ) و الفلكة (S) يتقاطعان في نقطة وحيدة هي $C(1,1,0)$.

خلاصة : المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$.

ملحوظة : هناك طريقة أخرى يمكن أن نحسب $d(\Omega,(\Delta))$ (مسافة المركز Ω عن المستقيم و ذلك بحساب $d(\Omega,(\Delta))=\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$)

و نتحقق أن $d(\Omega,(\Delta))=r=\sqrt{2}$ ثم نتحقق أن $C\in\Omega$ و $C\in(\Delta)$.

.03 نبين أن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

- لدينا : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}=0\vec{i}-0\vec{j}+2\vec{k}=2\vec{k}$.

خلاصة : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

- مساحة المثلث OCB :

لدينا : $S_{OBC}=\dfrac{1}{2}\times\left\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\dfrac{1}{2}\left\|2\vec{k}\right\|=\dfrac{1}{2}\times2=1$

و بالتالي : مساحة المثلث OBC هي $S_{OBC}=1\ u.a$ (حسب وحدة المساحة)

.02

يحتوي صندوق: على 8 كرات أربع كرات تحمل رقم 2 وكرة واحدة تحمل رقم 1 و كرة واحدة تحمل رقم 4 ؛ لا يمكن التميز بين الكرات باللمس و نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

.01 ليكن

✓ A الحدث : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 "

✓ B الحدث " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 "

❖ نبين أن : $p(A)=\dfrac{5}{14}$.

✓ عدد السحبات الممكنة (أي $card\Omega$) :

سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 8 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 8 .ومنه $card\Omega=C_8^3=\dfrac{8\times7\times\cancel{6}}{\cancel{1\times2\times3}}=56$

إذن : $card\Omega=C_8^3=56$.

✓ عدد السحبات التي نريد أن تتحقق (أي $cardA$) :

الحدث A نعبر عنه أيضا بما يلي : A " الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل الأعداد ① أو ② أو ④ "

و نعلم أن عدد هاته الكرات عددها هو 6 كرات .

إذن سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 6 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 6 و منه $cardA=C_6^3=\dfrac{\cancel{6}\times5\times4}{\cancel{1\times2\times3}}=20$

و منه : $cardA=C_6^3=20$.

ومنه : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{4\times5}{8\times7}=\dfrac{5}{14}$.

خلاصة : $p(A)=\dfrac{5}{14}$

❖ نبين أن : $p(B)=\dfrac{1}{7}$.

✓ عدد السحبات التي نريد أن تتحقق (أي $cardB$) :

الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : $\overline{A}$ " (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ②) أو (كرة تحمل العدد ① و كرة تحمل العدد ② و كرة تحمل العدد ④) "

- الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ② .
أي سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 4 كرات (التي تحمل العدد ②) يمثل تأليفة ل 3 من بين 4 وهي تتم ب $C_4^3 = C_4^1 = 4$ كيفيات مختلفة .
- كرة تحمل العدد ① و كرة تحمل العدد ② و كرة تحمل العدد ④) " وهي تتم ب $C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 1\times4\times1 = 4$ كيفيات.
- ومنه $cardB = C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 4+4 = 8$

ومنه : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\Omega} = \dfrac{C_4^3 + C_1^1\times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \dfrac{4+4}{8\times7} = \dfrac{\cancel{8}}{\cancel{8}\times7} = \dfrac{1}{7}$.

خلاصة : $\boxed{p(B) = \dfrac{1}{7}}$

01. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة .

أ- نبين أن : $p(X=16) = \dfrac{3}{28}$.

✓ الحدث $(X=16)$ يمثل الحدث " الكرات الثلاث المسحوبة من بينها كرتين تحملان العدد ② و كرة واحدة تحمل رقم ④ "

- سحب كرتين تحملان العدد ② من بين 4 كرات وهي تتم ب $C_4^2 = \dfrac{4\times3}{1\times2} = 6$ كيفيات مختلفة .
- كرة واحدة تحمل رقم ④ من كرة واحدة وهي تتم ب $C_1^1 = 1$ (بكيفية واحدة فقط)
- و منه : $card(X=16) = C_4^2 \times C_1^1 = 6$

و بالتالي : $p(X=16) = \dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3} = \dfrac{6}{8\times7} = \dfrac{3}{28}$.

خلاصة : $\boxed{p(X=16) = \dfrac{3}{28}}$

ب- نتمم ملء الجدول مع التعليل .

- نلاحظ أن : الحدث $(X=8)$ يمثل الحدث B و منه : $\boxed{p(X=8) = p(B) = \dfrac{1}{7}}$.
- الحدث $(X=4)$ يمثل الحدث " كرتين تحملان العدد ② و كرة تحمل العدد ① إذن $\boxed{p(X=4) = \dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3} = \dfrac{6\times1}{8\times7} = \dfrac{3}{28}}$
- الحدث $(X=0)$ يمثل الحدث " على الأقل كرة تحمل العدد ⓪ "

إذن الحدث المضاد ل $(X=0)$ هو الحدث A ومنه $\overline{(X=0)} = \overline{A}$

و منه : $p(X=0) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{5}{14} = \dfrac{9}{14}$ إذن $\boxed{p(X=0) = \dfrac{9}{14}}$

و منه سيتم ملء الجدول كالتالي :

x_i	0	4	8	16	المجموع
$p(X=x_i)$	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{3}{28}$	1

.03

نعتبر العددين العقديين a و b حيث $a=\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$.

.01 ..

أ- نتحقق أن : $b=(1+i)a$.

لدينا :
$$\begin{aligned}(1+i)a&=(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)\\&=\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1\\&=\sqrt{3}-1+\left(1+\sqrt{3}\right)i\\&=b\end{aligned}$$

خلاصة : $b=(1+i)a$

ب- نستنتج أن : $|b|=2\sqrt{2}$ و أن $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

- نستنتج أن : $|b|=2\sqrt{2}$.

لدينا :
$$\begin{aligned}|b|&=|(1+i)a|\\&=|1+i||a|\\&=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\\&=\sqrt{2}\times2\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

ومنه : $|b|=2\sqrt{2}$

- نستنتج أن : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

لدينا :

- $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$
- $a=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$.
- و منه : $b=(1+i)a=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$

ملحوظة : وهذه الطريقة نحصل بها على كل من : معيار b أي $|b|$ و على عمدة b أي $\arg b$.

- و بالتالي : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- نستنتج مما سبق أن : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

نعلم أن : $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\text{Re}(b)}{|b|}=\cos\frac{5\pi}{12}$. ($\text{Re}(b)$ هو الجزء الحقيقي ل b)

و بالتالي : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

02. نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لحقهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c حيث و $c=-1+i\sqrt{3}$.

أ- نتحقق أن : $c=ia$ و نستنتج أن $OA=OC$ و أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$.

- نتحقق أن : $c=ia$.

لدينا : $ia=i\left(\sqrt{3}+i\right)=i\sqrt{3}-1=-1+i\sqrt{3}=c$.

ومنه : $c=ia$

- نستنتج أن : $OA=OC$.

لدينا :

$$\begin{aligned}c=ia &\Rightarrow \frac{c}{a}=i\\ &\Rightarrow \left|\frac{c}{a}\right|=|i|\\ &\Rightarrow \frac{|c|}{|a|}=1\\ &\Rightarrow \frac{|c-0|}{|a-0|}=\frac{OC}{OA}=1\\ &\Rightarrow OC=OA\end{aligned}$$

و منه : $OA=OC$

- نستنتج أن : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$.

لدينا :

$$\begin{aligned}c=ia &\Rightarrow \frac{c}{a}=i\\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\arg i\;\;[2\pi]\\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;\;[2\pi]\\ &\Rightarrow \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;\;[2\pi]\end{aligned}$$

و منه : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$

ب- نبين أن : النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

❖ طريقة 1 :

لدينا الكتابة العقدي للإزاحة هي : $z'=z+c$

نعتبر أن النقطة A' حيث لحقها a' هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

و منه : $t_{\overrightarrow{OC}}(A)=A' \Leftrightarrow a'=a+c$

$\Leftrightarrow a'=a+ia$ (لأن $c=ia$)

$\Leftrightarrow a'=(1+i)a$

$\Leftrightarrow a'=b$ (لأن $b=(1+i)a$)

$\Leftrightarrow A'=t_{\overrightarrow{OC}}(A)=B$ (أي $a'=b$ $A'=B$)

خلاصة : النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

❖ طريقة 2 :

نرمز للإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ ب $t_{\overrightarrow{OC}}$.

و منه : B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ يعني أن : $t_{\overrightarrow{OC}}(A)=B$ و هذا يكافئ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ أي نبين أن

$Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{OC}}$ (لحق المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو $Z_{\overrightarrow{OC}}=c-0=c$ و $\overrightarrow{AB}$ هو $Z_{\overrightarrow{AB}}=b-a$ متساويين) أي $b-a=c-0=c$

من جهة أخرى : $b-a=(1+i)a-a$ (لأن $b=(1+i)a$)

$=a+ia-a$

$=ia$

$=c$ (حسب السؤال 2) أ -)

ومنه : $b-a=c$ و بالتالي $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{OC}}$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ و منه : $t_{\overrightarrow{OC}}(A)=B$.

خلاصة : B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

ج- نستنتج أن الرباعي $OABC$ مربع .

لدينا :

- B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ و منه : الرباعي $OABC$ متوازي الأضلاع .
- $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ إذن $OABC$ متوازي الأضلاع له زاوية قائمة .
- $OA=OC$ إذن $OABC$ متوازي الأضلاع له ضلعين متتابعين متقايسين .

ومنه : الرباعي $OABC$ متوازي الأضلاع له زاوية قائمة و له ضلعين متتابعين متقايسين إذن الرباعي $OABC$ مربع .

خلاصة : الرباعي $OABC$ مربع .

04.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

I.

01. نتحقق أن : $g(1)=0$.

لدينا : $g(1)=1^2+1-2+2\ln 1=2-2+2\times 0=0$.

خلاصة : $g(1)=0$.

02. انطلاقا من الجدول تغيرات الدالة g جانبه :

✓ نبين أن : $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

من خلال الجدول الدالة g هي تزايدية على $]0,+\infty[$ و منه : g تزايدية على $]0,1]$ و منه :لكل $x\in]0,1]$ لدينا :

$x\leq 1\Rightarrow g(x)\leq g(1)$ (لأن g تزايدية على $]0,1]$)

$\Rightarrow g(x)\leq 0$ (لأن $g(1)=0$)

و منه : $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

✓ نبين أن : $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$.

من خلال الجدول الدالة g هي تزايدية على $]0,+\infty[$ و منه : g تزايدية على $[1,+\infty[$ و منه :لكل $x\in[1,+\infty[$ لدينا :

$x\geq 1\Rightarrow g(x)\geq g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1,+\infty[$)

$\Rightarrow g(x)\geq 0$ (لأن $g(1)=0$)

و منه : $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$.

و ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. نبين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ و نؤول هندسيا النتيجة .

- نبين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

لدينا :

✓ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(1-\frac{2}{x}\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-\frac{2}{x}=-\infty$) و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty$ (خاصية) و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

✓ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x=0$

✓ ومنه : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

خلاصة : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$

- نؤول هندسيا النتيجة .

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

خلاصة : المنحنى (C) يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

02. ..

أ- نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

لدينا :

✓ $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$ (لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$) و $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ (خاصية) و منه $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

✓ $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

✓ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب- نبين أن : المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

لدينا :

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ومنه نحدد قيمة a (أي $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$)
- نحدد قيمة a :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{\ln x}{x}=1$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (خاصية) و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$ و منه $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{\ln x}{x}=0$)

و منه : $a=1$

- نحدد قيمة b (أي $b=\lim_{x\to+\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x$)

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$ $=\lim_{x\to+\infty}\cancel{x}+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x-\cancel{x}$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=$.

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ (خاصية) و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$ و منه $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{\ln x}{x}=+\infty$)

و منه : $b=+\infty$.

خلاصة : المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

.03

أ- نبين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع و جداء عدة دوال قابلة الاشتقاق على $]0,+\infty[$.

لدينا : $f'(x)=\left(x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right)'$.

$$=1+\left(1-\frac{2}{x}\right)'\ln x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{1}{x}$$ (لأن $(\ln x)'=\frac{1}{x}$)

$$=1+\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+2\ln x+x-2}{x^2}$$
$$= \frac{x^2+x-2+2\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

خلاصة : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب- نبين أن : الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

لهذا ندرس إشارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ أي ندرس إشارة $g(x)$ فقط .

حسب ما سبق :

- $g(x)\le 0$ لكل x من $]0,1]$ إذن $f'(x)\le 0$ على المجال $]0,1]$. و منه f تناقصية على المجال $]0,1]$.
- $g(x)\ge 0$ لكل x من $[1,+\infty[$ إذن $f'(x)\ge 0$ على المجال $[1,+\infty[$. و منه f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

خلاصة : الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

ج- نضع جدول لتغيرات f على المجال $]0,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

.04 ..

أ- نحل على المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$

لدينا :

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{x}=0 \text{ أو } \ln x=0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{x}=1 \text{ أو } \ln x=\ln 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x=2\in]0,+\infty[\text{ أو } x=1\in]0,+\infty[\right)$$

خلاصة : المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$ لها حلين على $]0,+\infty[$ هما $x=1$ أو $x=2$.

ب- نستنتج أن : المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما .

ليكن x من $]0,+\infty[$.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(C)\cap(D)\Leftrightarrow\begin{cases}M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(C)\\ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(D)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=y \\ y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=y=x$$

لهذا نحل المعادلة : $f(x)=y$

لدينا : $f(x)=y \Leftrightarrow \cancel{x}+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=\cancel{x}$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=2$ (حسب السؤال السابق)

إذن : بالنسبة ل $x=1$ فإن $y=x=1$ (لأن $f(x)=y=x$)

بالنسبة ل $x=2$ فإن $y=x=2$ (لأن $f(x)=y=x$)

خلاصة : المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين حيث زوج إحداثيتي كل منهما كالتالي $(1;1)$ و $(2;2)$.

ج- بين أن : $f(x)\le x$ لكل x من المجال $[1;2]$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1;2]$.

لدينا : $f(x)\le x \Leftrightarrow \cancel{x}+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\le \cancel{x}$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x}\right)\ln x\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\ln x\le 0 \quad ; \quad (x\in[1;2])$$

نعلم أن $\ln x\ge 0$ على المجال $[1,+\infty[$ إذن إشارة $(x-2)\ln x$ هي إشارة $x-2$ على المجال $[1;2]$

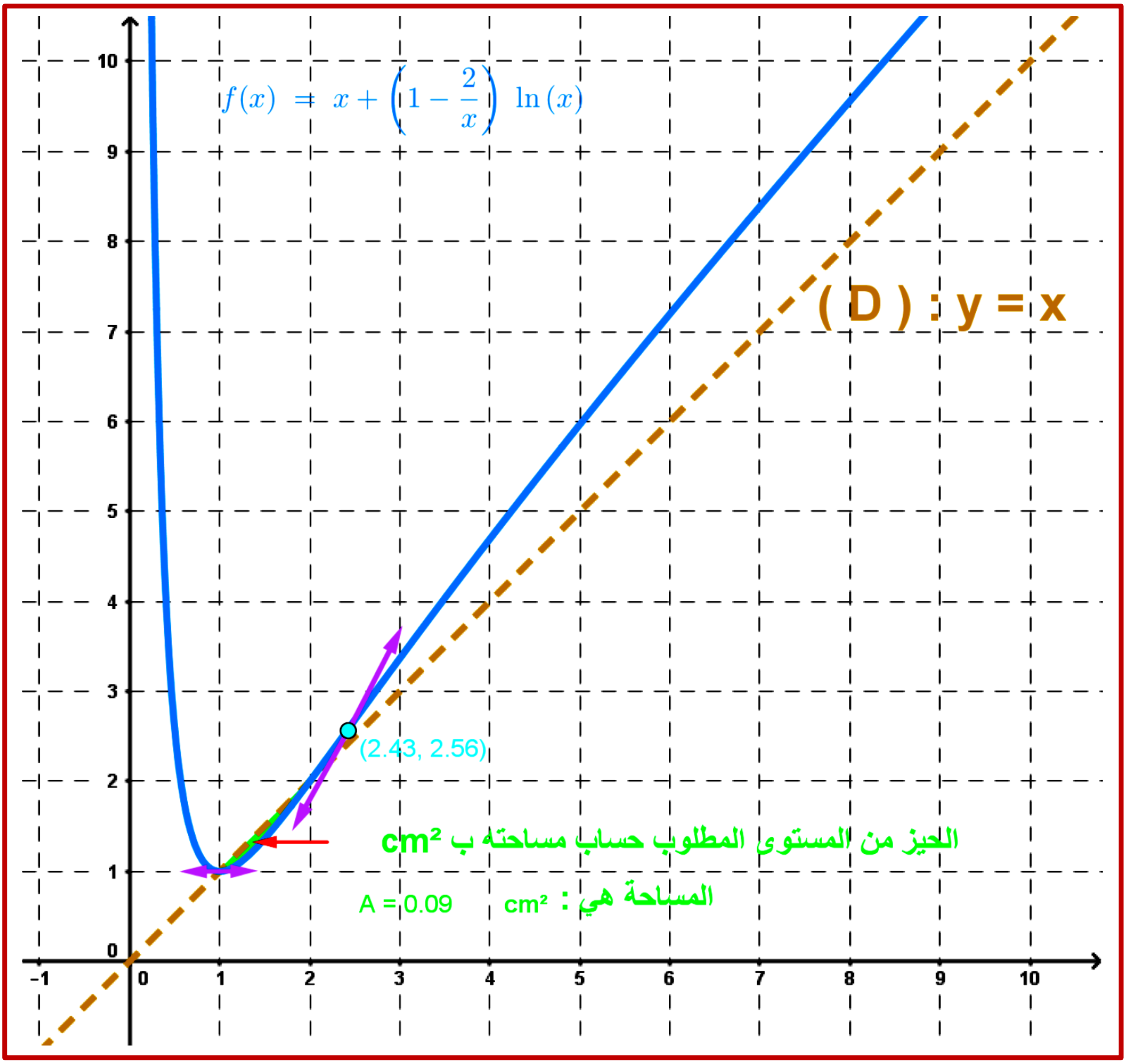
و منه الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1;2]$ هو كالتالي :

- المنحنى (C) و المستقيم (D) يتقاطعان في نقطتين حيث زوج إحداثيتي كالتالي $(1;1)$ و $(2;2)$.
- المنحنى (C) يوجد قطعا تحت المستقيم (D) على المجال $]1;2[$.

خلاصة : الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1;2]$ بواسط الجدول التالي :

x	1		2
$f(x)-x$	0	$-$	0
	$\Vert$	(C) تحت (D)	$\Vert$
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D)	(C) و (D) يتقاطعان		(C) و (D) يتقاطعان

.05 ننشئ المستقيم (D) و المنحنى (C) في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2,4$ و $2,5$).



..06

أ- نبين أن : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

لدينا : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 (\ln x)' \times \ln x dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left((\ln 2)^2 - (\ln 1)^2\right) = \frac{1}{2}\left((\ln 2)^2 - 0\right) = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

خلاصة : $\boxed{\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2}$

ب- نبين أن الدالة $H\ :\ x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h\ :\ x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0,+\infty[$.

لهذا نبين أن : $H'(x) = h(x)$.

لدينا : $H'(x) = (2\ln x - x)' = 2 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{2}{x} - 1 = h(x)$

و منه : $H'(x) = h(x)$

خلاصة : الدالة $H\ :\ x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h\ :\ x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0,+\infty[$.

ج- باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نبين أن : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$.

نضع :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ (1)\downarrow \quad (2)\searrow & - \quad \downarrow(3) \\ v'(x) = \frac{2}{x} - 1 & v(x) = 2\ln x - x \end{array}$$

ومنه:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = \left[\ln x (2\ln x - x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times (2\ln x - x) dx$$

$$= \ln 2 (2\ln 2 - 2) - \ln 1 (2\ln 1 - 1) - \int_1^2 \left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right) dx$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left(2\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^2 1 dx\right)$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left(2 \times \frac{1}{2} (\ln 2)^2 - [x]_1^2\right)$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left((\ln 2)^2 - (2-1)\right)$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1$$

$$= (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1$$

$$= (1 - \ln x)^2$$

خلاصة : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$

د- نحسب ب cm^2 مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

المساحة المطلوبة هي :

$\left(\int_1^2 |f(x) - x| dx\right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = \left(\int_1^2 (x - f(x)) dx\right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\ cm^2$. (لأن $f(x) \le x$ على $[1;2]$)

$$=\left(\int_1^2\left(x-\left(x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right)\right)dx\right)\times 1\times 1\ cm^2$$

$$=\int_1^2-\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x dx\ cm^2$$

$$=\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x dx\ cm^2$$

$$=(1-\ln 2)^2\ cm^2$$ (حسب السؤال السابق)

خلاصة : مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ هي $(1-\ln 2)^2\ cm^2$.

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{3}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01. نبين بالترجع أن : $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

لدينا : $1\le u_0=\sqrt{3}\le 2$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة n : أي $1\le u_n\le 2$ (معطيات الترجع) .
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $1\le u_{n+1}\le 2$

حسب معطيات الترجع لدينا : $1\le u_n\le 2$

و منه : $1\le u_n\le 2\Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(2)$ (لأن f تزايدية على $[1;2]$ و $1\le u_n\le 2$)

$\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le 2$ (لأن $f(2)\le 2$ و $f(1)\le 1$ و ذلك $(f(x)\le x\ ;\ x\in[1;2])$

أو أيضا $f(2)=2$ و $f(1)=1$ لأن (C) و (D) يتقطعان في نقطتين

حيث : زوج إحداثيتي كالتالي $(1;1)$ و $(2;2)$.

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

02. نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (4 (ج -)

لهذا نبين أن : $u_{n+1}-u_n\le 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع $u_n=x$.

- و نعلم أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ إذن $x=u_n\in[1;2]$ (لكل n من $\mathbb{N}$)
- و لدينا : $f(x)\le x$ لكل x من $[1;2]$ حسب II (4 (ج -) و منه : $f(u_n)\le u_n$ (لكل n من $\mathbb{N}$)

إذن : $u_{n+1}\le u_n$ (لأن $u_{n+1}=f(u_n)$) و ذلك لكل n من $\mathbb{N}$.

و بالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}\le u_n$ (أو أيضا $u_{n+1}-u_n\le 0$)

خلاصة : المتتالية (u_n) تناقصية .

03. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

❖ نستنتج أن : المتتالية (u_n) متقاربة

- لدينا المتتالية (u_n) تناقصية و مصغورة (لأن $1 \leq u_n \leq 2$) و منه : المتتالية (u_n) متقاربة مع نهايتها ℓ مع $\ell \in \mathbb{R}$

خلاصة : (u_n) متقاربة

❖ نحدد نهاية المتتالية (u_n)

- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$
- الدالة f متصلة على $I = [1;2]$
- $f(I) \subset I = [1;2]$ لأن :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 2 \qquad \left(f(x) \leq x \ ; \ x \in [1;2]\right)$$

- بما أن (u_n) متقاربة إذن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x) = x \ ; \ x \in [1;2]$ (حسب خاصية) .

أي $f(x) - x = 0 \ ; \ x \in [1;2]$ و هذه المعادلة لها حلين هما 1 و 2 و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية إذن $u_0 \geq u_1 \geq u_2 .... \geq u_n$ و منه $u_0 = \sqrt{3} \geq u_n$ أي $u_n \leq \sqrt{3} < 2$ و منه $u_n < 2$ ومنه الحل المقبول هو $\ell = 1$.

خلاصة : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$