التصحيح :

تصحيح التمرين الأول :

1) أ. لنبين بالترجع أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

- ✓ من أجل $n = 0$:

  لدينا $u_0 = 2$

  إذن $u_0 > 1$

- ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

  - نفترض أن : $u_n > 1$
  - و نبين أن : $u_{n+1} > 1$

  لدينا حسب الإفتراض : $u_n > 1$

  إذن $\frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16}$

  إذن $\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16}$

  إذن : $u_{n+1} > 1$

- ✓ نستنتج أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{16} - 1\right)u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$

❖ لدينا حسب نتيجة السؤال 1) أ. $u_n > 1$

إذن $u_n - 1 > 0$

إذن $\frac{-15}{16}(u_n - 1) < 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

ج. بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة

2)
أ.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - 1 \\ &= \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{16}(u_n - 1) \\ &= \frac{1}{16}v_n \end{aligned}$$

إذن $v_{n+1} = \frac{1}{16}v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{16}$

و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

❖ لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ إذن : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n$

و منه $v_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا $v_n = u_n - 1$ إذن $u_n = v_n + 1$

و منه $u_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n + 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

❖ بما أن $-1 < \frac{1}{16} < 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$

و منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

تصحيح التمرين الثاني :

1) أ. لدينا : $\overrightarrow{OA}(1,3,4)$ و $\overrightarrow{OB}(0,1,2)$

لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

ب. لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل : $2.x-2.y+1.z+d=0$

و بما أن : $O(0,0,0)\in(OAB)$ فإن : $2.(0)-2.(0)+1.(0)+d=0$

إذن : $d=0$

و بالتالي معادلة للمستوى (OAB) هي : $2x-2y+z=0$

2) لتكن الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

لدينا : $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

تكافئ : $x^2-6x+y^2+6y+z^2-6z=-2$

تكافئ :

$$x^2-2(3)x+(3)^2+y^2-2(-3)y+(-3)^2+z^2-2(3)z+(3)^2=-2+(3)^2+(3)^2+(3)^2$$

تكافئ : $(x-(3))^2+(y-(-3))^2+(z-(3))^2=25=(5)^2$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(3,-3,3)$ و شعاعها $R=5$

3) أ. لدينا : $d(\Omega,(OAB))=\dfrac{|2(3)-2(-3)+(3)|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}}=\dfrac{15}{3}=5$

بما أن : $d(\Omega,(OAB))=R$ فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S)

ب. لنحدد $H(x_H,y_H,z_H)$ نقطة تماس المستوى (OAB) و الفلكة (S)

لدينا $H(x_H,y_H,z_H)$ هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega(3,-3,3)$ على المستوى (OAB)

و بالتالي $H(x_H,y_H,z_H)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من $\Omega(3,-3,3)$

و العمودي على المستوى (OAB) مع المستوى (OAB).

لدينا $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB) و بما أن $(\Delta)\perp(OAB)$

فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ هي متجهة موجهة للمستوى (OAB). و لدينا (Δ) $\Omega(3,-3,3)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -3-2t \\ z = 3+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

$H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (OAB)$ تكافئ $\begin{cases} x_H = 3+2t \\ y_H = -3-2t \\ z_H = 3+t \\ 2x_H - 2y_H + z_H = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

بالتعويض نجد : $2(3+2t) - 2(-3-2t) + (3+t) = 0$

ومنه: $t = -1$

و بالتالي : $\begin{cases} x_H = 3+2(-1) = 1 \\ y_H = -3-2(-1) = -1 \\ z_H = 3+(-1) = 2 \end{cases}$ أي : $H(1,-1,2)$.

تصحيح التمرين الثالث :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 8z + 41 = 0$

لدينا : $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(41) = -100$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقددين مترافقين

$z = \dfrac{-(-8) - i\sqrt{100}}{2(1)}$ أو $z = \dfrac{-(-8) + i\sqrt{100}}{2(1)}$

$z = 4+5i$ أو $z = 4-5i$

إذن : $S = \{4-5i, 4+5i\}$

2) أ. لدينا : $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{(6+7i)-(3+4i)}{(4+5i)-(3+4i)} = \dfrac{3+3i}{1+i} = \dfrac{3(1+i)}{1+i} = 3$

بما أن $\dfrac{c-b}{a-b} \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.

ب. R الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته $\dfrac{-\pi}{2}$

$M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R

لدينا : $z' - \omega = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z - \omega)$

إذن : $z'-(4+7i)=-i\left(z-(4+7i)\right)$

إذن : $z'-4-7i=-i\left(z-4-7i\right)$

إذن : $z'=-i\left(z-4-7i\right)+4+7i$

إذن : $z'=-iz+4i-7+4+7i$

و منه : $z'=-iz-3+11i$

ج.

❖ لنحدد صورة النقطة C بالدوران R :

لدينا : $-ic-3+11i=-i\left(6+7i\right)-3+11i=-6i+7-3+11i=4+5i=a$

إذن : A هي صورة C بالدوران R.

❖ لدينا : $R(C)=A$ إذن : $\begin{cases}\Omega A=\Omega C\\ \left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\dfrac{\Omega A}{\Omega C}=1\\ \left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\left|\dfrac{a-\omega}{c-\omega}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{a-\omega}{c-\omega}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

و منه : $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}=1\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)\right)$

تصحيح التمرين الرابع :

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega=A_{10}^{2}=90$

1) A " الحصول على كرتين تحملان عددين زوجيين "

لدينا : $cardA=A_6^2=30$

إذن : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\,\Omega}=\dfrac{30}{90}$

ومنه : $p(A)=\dfrac{1}{3}$

2) لدينا : X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n=3$ و $p=p(A)=\dfrac{1}{3}$

$$p(X=1)=C_3^1 p^1(1-p)^{3-1}=3\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X=0)=C_3^0 p^0(1-p)^{3-0}=1\times1\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

$$p(X=1)=\frac{4}{9}=\frac{12}{27}$$

$$p(X=2)=C_3^2 p^2(1-p)^{3-2}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{2}{9}=\frac{6}{27}$$

$$p(X=3)=C_3^3 p^3(1-p)^{3-3}=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}=\frac{12}{27}$	$\frac{2}{9}=\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

تصحيح المسألة :

.I

1) $$g(1)=\frac{2}{1}-1+2\ln(1)=2-1+(2\times0)=1$$

2) لدينا $g(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $]0,+\infty[$

إذن : $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)\geq g(1)$

إذن : $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)\geq 1$

و منه : $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)>0$

.II

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3-3x+2(x+1)\ln(x)=-\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3-3x=3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2(x+1)=2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x)=-\infty \end{cases}$

التأويل الهندسي : (C) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0$

2) أ.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 3-3x+2(x+1)\ln x \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}-3=-3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{x}\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{cases}$

ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x=+\infty$

إذن : (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ. ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(3-3x+2(x+1)\ln(x)\right)' \\
&= -3+2\left((x+1)'\ln(x)+(x+1)\ln'(x)\right) \\
&= -3+2\left(\ln(x)+(x+1)\times\frac{1}{x}\right) \\
&= -3+2\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right) \\
&= -3+2\left(\ln x+1+\frac{1}{x}\right) \\
&= -3+2\ln x+2+\frac{2}{x} \\
&= \frac{2}{x}-1+2\ln x
\end{aligned}
$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

ت. حسب I. 2) لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)>0$

و منه : $\forall x\in]0,+\infty[: f'(x)>0$

و بالتالي f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4) أ. ليكن $x\in]0,+\infty[$:

لدينا f' قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) \\ &= g'(x) \\ &= \frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x} \\ &= \frac{-2+2x}{x^2} \\ &= \frac{2(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

بما أن $x^2>0$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

لدينا : f'' تنعدم و تغير إشارتها عند 1 إذن النقطة $I(1,0)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).
(لاحظ $f(1)=0$)

ب. معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $I(1,0)$:

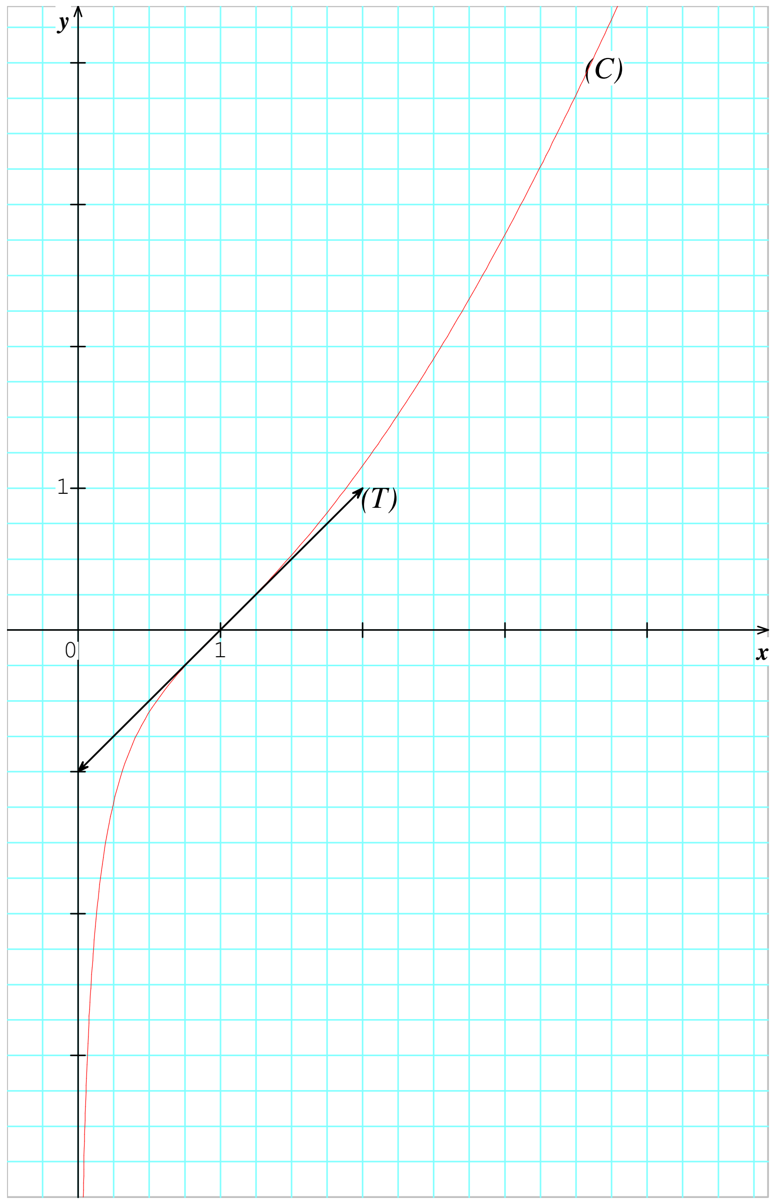
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

لدينا : $f'(1)=g(1)=1$ و $f(1)=0$

إذن : $y=1\times(x-1)+0$

و منه : $(T): y=x-1$

ج. إنشاء (C):



5) أ.

$$\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \left[x+\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$
$$= \left(2+\frac{2^2}{4}\right)-\left(1+\frac{1^2}{4}\right)$$
$$= 3-\frac{5}{4}$$
$$= \frac{7}{4}$$

ب.

$$\begin{cases} u'(x)=x+1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} u(x)=\frac{x^2}{2}+x \\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^2 (x+1)\ln(x)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\times\frac{1}{x}dx$$
$$= (4\ln 2)-\left(\frac{3}{2}\ln 1\right)-\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx$$
$$= 4\ln(2)-\frac{7}{4}$$

ج. لدينا : $A=\int_1^2 |f(x)|dx \times \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

على المجال $[1,2]$ لدينا : $f(x)\geq 0$

إذن : $A=\int_1^2 f(x)dx \times 2cm\times 2cm$

إذن : $A=\int_1^2 (3-3x+2(x+1)\ln(x))dx \times 4cm^2$

إذن: $A=\left(\int_1^2 (3-3x)dx+2\int_1^2 (x+1)\ln(x)dx\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=\left(\left[3x-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2+2\left(4\ln(2)-\frac{7}{4}\right)\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=\left((0)-\left(\frac{3}{2}\right)+8\ln(2)-\frac{7}{2}\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=(-5+8\ln(2))\times 4cm^2$

و منه : $A=(-20+32\ln(2))cm^2$

6) لنحل مبيانيا : $(x+1)\ln(x)\geq\frac{3}{2}(x-1)\quad : x\in\left]0,+\infty\right[$

$$\begin{aligned}(x+1)\ln(x)\geq\frac{3}{2}(x-1) &\Leftrightarrow 2(x+1)\ln(x)\geq 3(x-1)\\ &\Leftrightarrow 2(x+1)\ln x\geq 3x-3\\ &\Leftrightarrow 3-3x+2(x+1)\ln x\geq 0\\ &\Leftrightarrow f(x)\geq 0\end{aligned}$$

مبيانيا $f(x)\geq 0$ تعني أن (C) يوجد فوق محور الأفاصيل

و بالتالي : $S=\left[1,+\infty\right[$