.01

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.01 نتحقق أن : $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- لدينا : $\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)} = \frac{-12+4u_n}{2+(3-u_n)} = \frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n} = \frac{3+u_n}{5-u_n} - 3 = u_{n+1} - 3$.

خلاصة : $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نبين بالترجع : $u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

▪ نتحقق أن العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 2 < 3$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$.

▪ نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة n من $\mathbb{N}$ أي $u_n < 3$ (معطيات الترجع)

▪ نبين أن العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$ أي نبين أن : $u_{n+1} < 3$

حسب معطيات الترجع $u_n < 3$ ومنه $\left.\begin{array}{l} u_n - 3 < 0 \\ 3-u_n > 0 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} 4(u_n-3) < 0 \\ 2+(3-u_n) > 0 \end{array}\right\}$

و بالتالي $0 > \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)} = u_{n+1} - 3$ و منه نستنتج أن $u_{n+1} - 3 < 0$ أي $u_{n+1} < 3$.

إذن : العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$.

خلاصة : $u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.02 لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $v_n = \frac{u_n - 1}{3-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- نبين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

- لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{3+u_n}{5-u_n} - 1}{3 - \frac{3+u_n}{5-u_n}}$$

$$= \frac{\frac{3+u_n-5+u_n}{5-u_n}}{\frac{15-3u_n-3-u_n}{5-u_n}}$$

$$= \frac{-2+2u_n}{12-4u_n}$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{-1+u_n}{3-u_n}$$

$$\left(v_n = \frac{u_n - 1}{3-u_n} \right) \qquad = \frac{1}{2} \times v_n$$ و منه : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

خلاصة : المتتالية $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

- نستنتج أن : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بما أن : المتتالية $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ إذن حدها العام يكتب على الشكل التالي

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} \; ; \; (n_0 = 0)$$

$$= v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \; ; \; \left(v_0 = \frac{u_0 - 1}{3-u_0} = \frac{2-1}{3-2} = 1 \right)$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

خلاصة : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- نبين أن : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $v_n = \frac{u_n - 1}{3-u_n} \Leftrightarrow 3v_n - v_n \times u_n = u_n - 1$

$$\Leftrightarrow -v_n \times u_n - u_n = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \times \left(-1 - v_n\right) = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1-3v_n}{-1-v_n} = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$$

خلاصة : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نكتب u_n بدلالة n

لدينا : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n} = \frac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

خلاصة : $u_n = \dfrac{1+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$ (أو أيضا : $u_n = \dfrac{2^n+3}{2^n+1}$ غير ضرورية حسب السؤال الموالي)

ج- نحدد نهاية المتتالية (u_n)

- لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ حسب خاصية .
- و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1+0}{1+0} = 1$.

خلاصة : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

02.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(2,1,3)$ و $B(3,1,1)$ و $C(2,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها ديكارتية : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$.

01.

أ- نبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = 2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\1-1\\1-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-2\\2-1\\1-3\end{pmatrix}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1\\-2 & -2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 0\\-2 & -2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

خلاصة : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = 2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

ب- نستنتج أن : $2x+2y+z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

- لدينا : المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;2;1) = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = 2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ منظمية على المستوى (ABC)
- ومنه :

$$M(x,y,z)\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+2(y-1)+1(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y+z-9 = 0$$

خلاصة : $2x+2y+z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

02....

أ- نبين أن : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها $r=6$.

لدينا :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2+2y+1-1+z^2-34=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2-34=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=36=6^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها $r=6$.

خلاصة : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها $r=6$.

د- نبين أن : $d(\Omega,(ABC))=3$.

- لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2\times1+2(-1)+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=3$

خلاصة : $d(\Omega,(ABC))=3$

- نستنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

بما أن : $(r=6)$; $d(\Omega,(ABC))=3<6$ إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

خلاصة : المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

03.

أ- نحدد تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC) .

- لدينا المتجهة : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ موجهة ل (Δ) لأنها منظمية على المستوى (ABC) و $\Omega(1,-1,0)\in(\Delta)$

- تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; $(\Delta)\ :\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+2t\\ z=t\end{cases}$

- خلاصة : تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; $(\Delta)\ :\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+2t\\ z=t\end{cases}$.

ب- نبين أن : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B

نعلم أن مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة (S) على المستوى (ABC) أي تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ)

و منه :

$$M(x,y,z)\in(ABC)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(ABC)\\ M\in(\Delta)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y+z-9=0\\ \begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+2t\\ z=t\end{cases}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+2t)+2(-1+2t)+t-9=0 \\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9t-9=0 \\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ \begin{cases} x=1+2\times1=3 \\ y=-1+2\times1=1 \\ z=1 \end{cases} \end{cases}$$

ومنه : تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) هي النقطة $B(3,1,1)$

خلاصة : مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $B(3,1,1)$.

.03

.01 نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+29=0$.

- نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times29=16-116=-100=i^2\times10^2=(10i)^2$
- حلي المعادلة هما : $z_1=\dfrac{4+10i}{2}=2+5i$ و $z_2=\overline{z_1}=2-5i$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{2+5i;2-5i\}$

.01 نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط Ω و A و B التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c و ω حيث : $\omega=2+5i$ و $a=5+2i$ و $b=5+8i$.

أ- ليكن u العدد الحقيقي حيث : $u=b-\omega$.

- نتحقق أن : $u=3+3i$.

لدينا : $u=b-\omega=5+8i-(2+5i)=5+8i-2-5i=3+3i$.

خلاصة : $u=3+3i$

- نبين أن : $\arg(u)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

لدينا : $u=3+3i=3(1+i)=[3;0]\times\left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$ و منه : $\arg(u)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

خلاصة : $\arg(u)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ب- نحدد عمدة العدد العقدي $\bar{u}$.

لدينا :

$$\arg(\bar{u}) \equiv -\arg(u)\ [2\pi]$$
$$\equiv -\arg(u)\ [2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

خلاصة : $\arg(\bar{u}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ج- نتحقق أن : $a-\omega=\bar{u}$

- لدينا : $a-\omega = a = 5+2i-(2+5i) = 5+2i-2-5i = 3-3i = \bar{u}$.

خلاصة : $a-\omega=\bar{u}$.

- نستنتج أن : $\Omega A = \Omega B$ و $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

▪ لدينا :

$$|u| = |\bar{u}| \Leftrightarrow |b-\omega| = |a-\omega|$$
$$\Leftrightarrow \Omega B = \Omega A$$

و منه : $\Omega A = \Omega B$.

▪ لدينا :

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv \arg(u) - \arg(\bar{u})\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

خلاصة : $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

د- لنعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

نحدد صورة النقطة A بالدوران R .

طريقة 1 :

لدينا :

- نعلم أن : $\overline{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \equiv \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

أي $\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ و هذا يمثل أن $\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \overline{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ B صورة A بالدوران الذي مركزه Ω و قياس زاويته هو $\frac{\pi}{2}$.

خلاصة : صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها $b = 5+8i$.

طريقة 2 : (غير مرغوب فيها حسب أجوبة الأسئلة السابقة)

لدينا الشكل العقدي هو : $z' - \omega = (z-\omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو قياس زاوية الدوران :

و منه :

$$z' - (2+5i) = (z-(2+5i))e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z' = 2+5i+(z-2-5i)i \qquad ; \quad \left(e^{i\frac{\pi}{2}} = i\right)$$

$$z' = iz+2+5i-2i+5$$

$$z' = iz+7+3i$$

خلاصة : الكتابة العقدية للدوران r $z' = iz+7+3i$

و منه :

$$r(A) = A' \Leftrightarrow a' = i(5+2i)+7+3i$$

$$\Leftrightarrow a' = 8i+5 = b$$

خلاصة : صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها $b = 5+8i$.

.04

يحتوي صندوق: على 10 كرات أربع كرات حمراء و ست كرات خضراء (لا يمكن التميز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق

.01 ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان"

نبين أن : $p(A) = \frac{2}{15}$.

- عدد السحبات الممكنة : سحب كرتين في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تأليفة ل 2 من بين 10 .

  و منه : $card\Omega = C_{10}^2 = \frac{10\times 9}{1\times 2} = 45$.

- نحسب cardA

  الكرتان المسحوبتان حمراوان من بين 4 يمثل تأليفة ل 2 من بين 4 و منه : $cardA = C_4^2 = \frac{4\times 3}{1\times 2} = 6$.

  ومنه : $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

  خلاصة : $p(A) = \frac{2}{15}$

.02 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين .

أ- نبين أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2,3,4\}$.

- عندما نسحب كرتين من اللون الأحمر يبقى في الصندوق كرتين من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 2 .
- عندما نسحب كرتين من اللون الأخضر يبقى في الصندوق أربع كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 4 .
- عندما نسحب كرة من اللون الأحمر و الأخرى من اللون الأخضر يبقى في الصندوق ثلاث كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 3

خلاصة : مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $X(\Omega) = \{2,3,4\}$.

ب- نبين أن : $p(X=3)=\frac{8}{15}$.

- الحدث $(X=3)$ يمثل الحدث " سحب كرتين من لونين مختلفين "

و منه : سحب كرة حمراء من بين 4 إذن $C_4^1=4$ و كرة خضراء من بين 6 إذن $C_6^1=6$ ومنه $card(X=3)=C_4^1\times C_6^1=24$

و بالتالي : $p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8\times 3}{15\times 3}=\frac{8}{15}$.

خلاصة : $p(X=3)=\frac{8}{15}$

- نحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

نلخص ذلك بالجدول التالي :

	من اللون الأخضر	احدهما حمراء و الأخرى خضراء	من اللون الأحمر	سحب لكرتين
المجموع	4	3	2	x_i
1	$p(X=4)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$	$p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$	$p(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$	$p(X=x_i)$

.05

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$.

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

.I

.01 ...

أ- نبين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}=-\infty$

خلاصة : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ب- نبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و منه:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=\lim_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}-(2x-2)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^{x}=0$$

و منه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=0$

خلاصة : المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

.02...

أ- نبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2+e^{2x}-4e^{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x}+\frac{e^{x}}{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-4=+\infty$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

- نؤول النتيجة هندسيا :

$(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

.03

أ- نبين أن : $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع عدة دوال قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا : $f'(x)=\left(2x-2+e^{2x}-4e^{x}\right)'=2+2e^{2x}-4e^{x}=2\left(1+\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}\right)=2\left(\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}+1\right)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$.

خلاصة : $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- نضع جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '		+	0	+	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

ج- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ حيث $f(\alpha)=0$.

- نثبت أن : f تقابل من $]1,\ln 4[$ إلى $f\left(]1,\ln 4[\right)$

الدالة f متصلة لأنها قابلة للاشتقاق (أو أيضا مجموع عدة دوال متصلة) على $]1,\ln 4[$

f تزايدية قطعا على $]1,\ln 4[$ (إذن f تقابل من $]1,\ln 4[$ إلى $f\left(]1,\ln 4[\right)=\left]e^{2}-4e;4\ln 2-2\right[$)

- لدينا $\left(2\ln 2-1=\ln 4-\ln e>0\ ;\ 4>e\right)$; $f(1)\times f(\ln 4)=\left(e^{2}-4e\right)\left(4\ln 2-2\right)=e\underbrace{(e-4)}_{<0}2\times\underbrace{(2\ln 2-1)}_{>0}<0$

- ومنه : $0 \in f\left(\left]1, \ln 4\right[\right) = \left]e^2 - 4e; 4\ln 2 - 2\right[$
- إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]1, \ln 4\right[$ حيث $f(\alpha) = 0$. (أو أيضا حسب الدالة f تقابل)

خلاصة : يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]1, \ln 4\right[$ حيث $f(\alpha) = 0$.

.04 ..

أ- نبين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $\left]\ln 4; +\infty\right[$ وتحت المستقيم (D) على المجال $\left]-\infty; \ln 4\right[$.

لهذا ندرس إشارة $f(x) - (2x-2)$.

لدينا :

$$f(x) - (2x-2) = \cancel{2x} - \cancel{2} + e^{2x} - 4e^x - \cancel{2x} + \cancel{2} = e^x\left(e^x - 4\right)$$

إشارة الفرق هي إشارة $e^x - 4$ لأن $e^x > 0$

ندرس إشارة $e^x - 4$

ومنه :

$$\begin{aligned} e^x - 4 > 0 &\Leftrightarrow e^x > 4 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) > \ln 4 \\ &\Leftrightarrow x > \ln 4 \end{aligned}$$

وضع $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم بواسط الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$f(x) - (2x-2)$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (D)		(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) فوق (D)	

ب- نبين أن : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0.-5)$.

- نحسب الدالة المشتقة الثانية لتحديد نقط انعطاف f .

لدينا : $f'(x) = 2\left(e^x - 1\right)^2$ و منه : $f''(x) = \left[2\left(e^x - 1\right)^2\right]' = 2\times 2\left(e^x - 1\right)'\left(e^x - 1\right) = 4e^x\left(e^x - 1\right)$

- إشارة f'' هي إشارة $e^x - 1$

و منه :

$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) \geq \ln 1 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

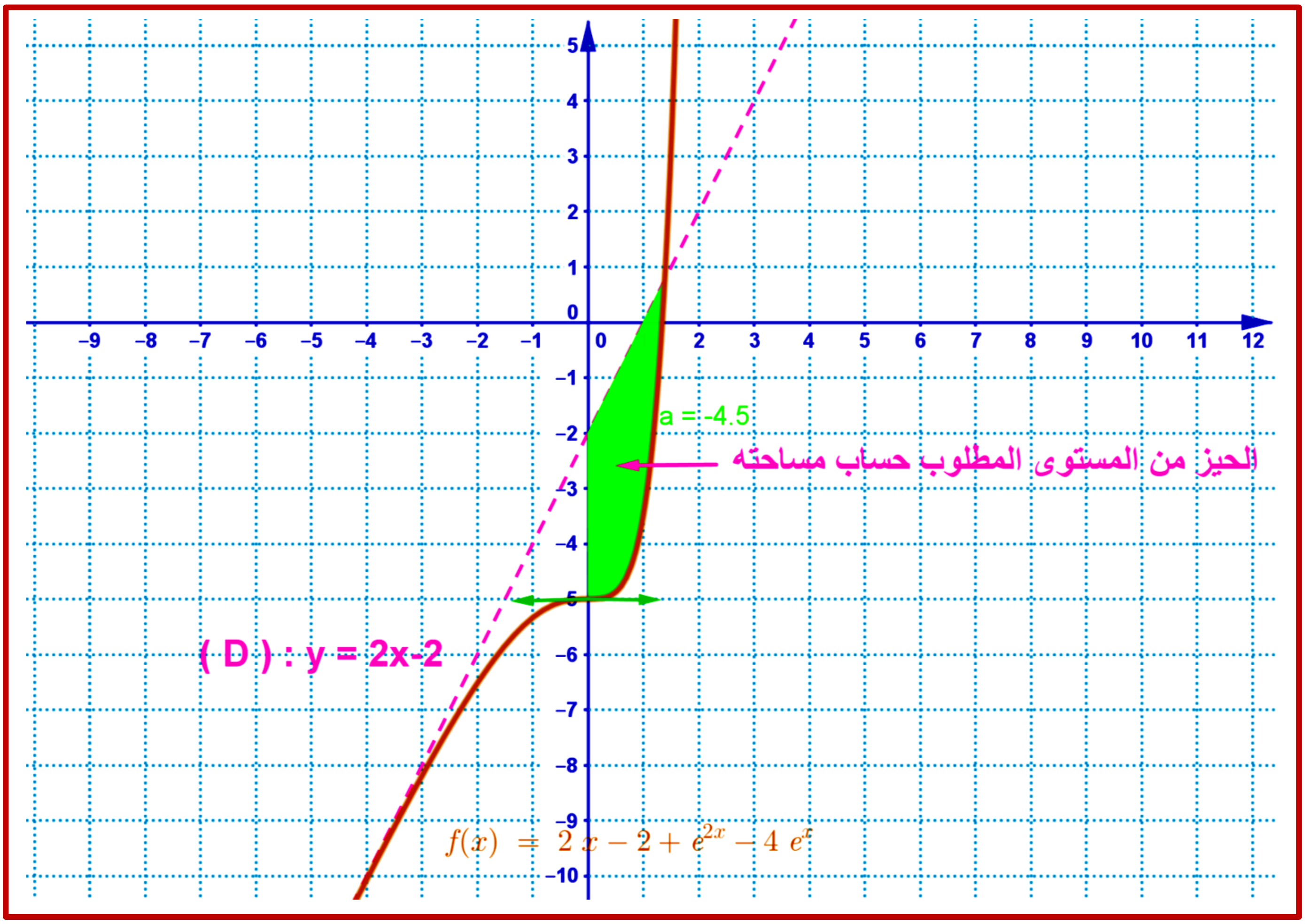
إشارة f'' بواسطة الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه : الدالة المشتقة الثانية تنعدم في $x_0=0$ و تتغير إشارتها بجوار $x_0=0$ إذن النقطة التي أفصولها $x_0=0$ هي نقطة انعطاف و حيدة و لدينا $f(0)=2\times0-2+e^{2\times0}-4e^0=-2+1-4=-5$

خلاصة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0.-5)$.

ج- ننشئ المستقيم (D) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (نأخذ $\ln4\approx1,4$ و $\alpha\approx1,3$).



05..

أ- نبين أن : $\int_0^{\ln4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=-\frac{9}{2}$

لدينا :

$$\int_0^{\ln4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x\right]_0^{\ln4}=\frac{1}{2}e^{2\ln4}-4e^{\ln4}-\left(\frac{1}{2}e^{2\times0}-4e^0\right)=\frac{1}{2}\times e^{\ln16}-4\times4-\left(\frac{1}{2}\times1-4\times1\right)=-\frac{9}{2}$$

خلاصة : $\int_0^{\ln4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=-\frac{9}{2}$

ب- نحسب ب cm^2 مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln4$

المساحة المطلوبة هي :

$$\int_0^{\ln 4}\left((2x-2)-f(x)\right)dx=\int_0^{\ln 4}-\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\left(\frac{-9}{2}\right)=\frac{9}{2}cm^2 .$$

خلاصة : مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln 4$ هي $\frac{9}{2}cm^2$

II...

01. ...

أ- نحل المعادلة التفاضلية : $y''-3y'+2y=0$

هي معادلة على شكل $y''+ay'+by=0$ ومنه المعادلة المميزة هي : $r^2-3r+2=0$

نحل المعادلة المميزة :

لدينا :

$$\begin{aligned} r^2-3r+2=0 &\Leftrightarrow r^2-r-2r+2=0\\ &\Leftrightarrow r(r-1)-2(r-1)=0\\ &\Leftrightarrow (r-1)(r-2)=0\\ &\Leftrightarrow r=1 \text{ أو } r=2 \end{aligned}$$

و منه المعادلة المميزة لها حلين حقيقين $r_1=1$ و $r_2=2$

و بالتالي : الحل العام المعادلة التفاضلية هي الدوال التي على شكل : $y=\alpha e^{x}+\beta e^{2x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

ب- نحدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$.

- لدينا : $g(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{2x}$ نحدد α و β حيث : $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$.
- لدينا : $g'(x)=\left(\alpha e^{x}+\beta e^{2x}\right)'=\alpha e^{x}+2\beta e^{2x}$ ومنه $g'(0)=-2\Leftrightarrow \alpha\times1+2\beta\times1=-2$
- و $g(0)=-3\Leftrightarrow \alpha\times1+\beta\times1=-2$
- نحصل على النظمة : $\begin{cases}\alpha+2\beta=-2\\ \alpha+\beta=-3\end{cases}$ و منه : $\beta=1$ و $\alpha=-4$

خلاصة : الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$ هي $g(x)=e^{2x}-4e^{x}$.

02. لتكن h الدالة العددية المعرفة على $]\ln 4;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$.

أ- نبين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} و أن h^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن : $h(x)=\ln(g(x))$ و $f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^{x}=g(x)$

- اتصال h على $]\ln 4;+\infty[$:

- لدينا الدالة : $g\ :\ x\mapsto e^{2x}-4e^{x}$ متصلة (لأنها قابلة للاشتقاق مرتين و ذلك حل خاص للمعادلة التفاضلية من الدرجة 2) و موجبة قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ (لأن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4;+\infty[$ ومنه $f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^{x}=g(x)>0$)
- الدالة : $x\mapsto \ln x$ متصلة على $]0;+\infty[$

- و منه : الدالة : $h(x)=\ln(e^{2x}-4e^{x})$ متصلة على $]\ln 4;+\infty[$ لأنها مركبة دالتين متصلتين .
- الرتابة قطعا على $]\ln 4;+\infty[$:
- لدينا الدالة : $x\mapsto \ln x$ تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$
- لدينا الدالة : $x\mapsto e^{2x}-4e^{x}$ قابلة للاشتقاق على $]\ln 4;+\infty[$ مع دالتها المشتقة هي $x\mapsto 2e^{2x}-4e^{x}=2e^{x}(e^{x}-2)$ إشارتها هي إشارة $e^{x}-2$ و منه : $e^{x}-2>0\Leftrightarrow x>\ln 2$ إذن الدالة $x\mapsto e^{2x}-4e^{x}$ هي تزايدية قطعا على $]\ln 2;+\infty[$ و منه هي تزايدية قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ (لأن $]\ln 2;+\infty[\subset]\ln 4;+\infty[$).
- الدالة h هي تزايدية قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ لأنها مركبة دالتين تزايديتين قطعا .
- و بالتالي الدالة h هي متصلة و تزايدية قطعا على $]\ln 4;+\infty[$ إذن h تقبل دالة عكسية h^{-1} من $J=h(]\ln 4;+\infty[)$ إلى $]\ln 4;+\infty[$.

خلاصة : h تقبل دالة عكسية h^{-1} من $J=h(]\ln 4;+\infty[)$ إلى $]\ln 4;+\infty[$.

- نحدد J

لدينا :

$\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} h(x)=\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}}\ln(f(x)-(2x-2))=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} f(x)-(2x-2)=0^{+}$ ((C_f) فوق (D) على $]\ln 4;+\infty[$) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}-4e^{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln e^{x}(e^{x}-4)=+\infty$.

ومنه : $h(]\ln 4;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to(\ln 4)^{+}} h(x);\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[=\mathbb{R}$

خلاصة : الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

ب- نتحقق أن : $h(\ln 5)=\ln 5$ ثم نحدد $(h^{-1})'(\ln 5)$.

- لدينا : $h(\ln 5)=\ln(e^{2\ln 5}-4e^{\ln 5})=\ln(e^{\ln 25}-4\times 5)=\ln(25-20)=\ln 5$

خلاصة : $h(\ln 5)=\ln 5$

- نحدد $(h^{-1})'(\ln 5)$.

لدينا :

- h قابلة للاشتقاق على $]\ln 4;+\infty[$ (مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق) و منه h قابلة للاشتقاق في $\ln 5$ (لأن $\ln 5\in]\ln 4;+\infty[$)
- نبين أن : $h'(\ln 5)\neq 0$ (أي h' لا تنعدم في $\ln 5$)

لدينا : $h'(x)=\left(\ln(e^{2x}-4e^{x})\right)'=\dfrac{(e^{2x}-4e^{x})'}{e^{2x}-4e^{x}}=\dfrac{2e^{2x}-4e^{x}}{e^{2x}-4e^{x}}=\dfrac{2\cancel{e^{x}}(e^{x}-2)}{\cancel{e^{x}}(e^{x}-4)}=\dfrac{2(e^{x}-2)}{e^{x}-4}$

ومنه : $h'(\ln 5)=\dfrac{2(e^{\ln 5}-2)}{e^{\ln 5}-4}=\dfrac{2(5-2)}{5-4}=6$ و بالتالي $h'(\ln 5)\neq 0$.

- إذن الدالة العكسية h^{-1} قابلة للاشتقاق في $h(\ln 5)$ مع $\left(h^{-1}\right)'\left(h(x_0)\right) = \frac{1}{h'(x_0)}$ نأخذ : $x_0 = \ln 5$

و منه : $\left(h^{-1}\right)'\left(h(\ln 5)\right) = \frac{1}{h'(\ln 5)} = \frac{1}{6}$ خلاصة : $\boxed{\left(h^{-1}\right)'(\ln 5) = \frac{1}{6}}$

انــــتـــهـــــى