تصحيح التمرين الأول

(1

✓ لدينا (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها هو $\sqrt{3}$

إذن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على شكل : $(x-1)^2+(y-(-1))^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن : $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3$

إذن : $x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2=3$

ومنه : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة (S)

✓ لدينا : $(0)^2+(0)^2+(1)^2-2(0)+2(0)-1=0+0+1-0+0-1=0$

إذن : A تنتمي إلى (S)

(2 أ-

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,1)$

إذن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}\\ &=(1)\vec{i}-(1)\vec{j}+(-1)\vec{k}\\ &=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\end{aligned}$$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : للمستوى $(1).x+(-1).y+(-1).z+d=0$

أي : $x-y-z+d=0$

و لدينا : $A(0,0,1)\in(ABC)$ إذن : $(0)-(0)-(1)+d=0$ أي : $d=1$

و بالتالي : $x-y-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب-

✓ $$d(\Omega,(ABC))=\frac{|(1)-(-1)-(0)+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

✓ بما أن $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}=R$ (R شعاع الفلكة (S)) فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

و بما أن $A\in(ABC)\cap(S)$ فإن نقطة التماس هي A

(3 أ- لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و $(\Delta)\perp(ABC)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا : $\Omega(1,-1,0)\in(\Delta)$

و منه تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=(1)+t(1)=1+t \\ y=(-1)+t(-1)=-1-t \\ z=(0)+t(-1)=-t \end{cases}$

ب- لنحدد مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع (Δ) و الفلكة (S)

$$M(x,y,z)\in(\Delta)\cap(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=-t \\ (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \end{cases}$$

بعد التعويض نجد : $t^2=1$

إذن : $\begin{cases} x=1+1=2 \\ y=-1-1=-2 \\ z=-1 \\ t=1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=1+(-1)=0 \\ y=-1-(-1)=0 \\ z=-(-1)=1 \\ t=-1 \end{cases}$

تصحيح التمرين الثاني

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-8z+25=0$:

لدينا : $\Delta=(-8)^2-4(1)(25)=64-100=-36$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z_2=\frac{-(-8)+i\sqrt{36}}{2(1)}=\frac{8+6i}{2}=4+3i \quad \text{و} \quad z_1=\frac{-(-8)-i\sqrt{36}}{2(1)}=\frac{8-6i}{2}=4-3i$$

و منه : $S=\{4-3i,4+3i\}$

2) أ- لدينا $D(d)$ صورة $A(a)$ بالإزاحة T

إذن : $d=a+z_{\overrightarrow{BC}}$

إذن : $d=a+c-b$

إذن : $d=(4+3i)+(10+3i)-(4-3i)$

ومنه : $d=10+9i$

ب-

✓ لدينا : $\frac{b-a}{d-a}=\frac{(4-3i)-(4+3i)}{(10+9i)-(4+3i)}=\frac{-6i}{6+6i}=\frac{-i}{1+i}=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}(1+i)$

✓

- $$\left|-\frac{1}{2}(1+i)\right|=\left|\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
- الشكل المثلثي :

$$\frac{-1}{2}(1+i)=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

ج-

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right) &\equiv \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)[2\pi]\\ &\equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]\end{aligned}$$

تصحيح التمرين الثالث

1) ليكن $n\in\mathbb{N}$
لدينا :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-1 &=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}-1\\ &=\frac{1}{5}u_n-\frac{1}{5}\\ &=\frac{1}{5}(u_n-1)\end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) أ-

✓ من أجل $n=0$
لدينا $u_0=2$
إذن : $u_0>1$
✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن $u_n>1$
- و نبين أن : $u_{n+1}>1$ ؟

لدسنا حسب نتيجة السؤال 1) : $u_{n+1}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)$

و حسب الإفتراض لدينا $u_n>1$ إذن $u_n-1>0$ إذن $\frac{1}{5}(u_n-1)>0$

إذن $u_{n+1}-1>0$ و منه $u_{n+1}>1$

✓ نستنتج أن : $u_n>1$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}(u_n - 1)$$

لدينا : $u_n - 1 > 0$

إذن : $\frac{-4}{5}(u_n - 1) < 0$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي : المتتالية (u_n) تناقصية

ج- بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة

3) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$

✓ لدينا باستعمال نتيجة السؤال 1) : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1) = \frac{1}{5}v_n$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

✓ لنكتب v_n بدلالة n

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$

إذن : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

و منه : $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا $u_n - 1 = v_n$

إذن $u_n = v_n + 1$

و منه $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ بما أن $-1 < \frac{1}{5} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

تصحيح التمرين الرابع

التجربة " سحب في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا $card\,\Omega = C_9^3 = 84$

1) A : " الحصول على ثلاث بيدقات من نفس اللون "

$$\boxed{B},\boxed{B},\boxed{B} \quad \text{أو} \quad \boxed{N},\boxed{N},\boxed{N}$$

$$cardA = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{5}{84}$$

B : " الحصول على ثلاث بيدقات مختلفة اللون مثنى مثنى "

$$\boxed{B},\boxed{N},\boxed{V}$$

$$cardB = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\,\Omega} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

2) أ-

$$\boxed{\overline{N}},\boxed{\overline{N}},\boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 0$$

$$\boxed{N},\boxed{\overline{N}},\boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 1$$

$$\boxed{N},\boxed{N},\boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 2$$

$$\boxed{N},\boxed{N},\boxed{N} \rightarrow X = 3$$

ب-

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{84} = \frac{3 \times 6}{84} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84} = \frac{3 \times 15}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

ج- لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{C_6^3}{84} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

$$p(X = 1) = \frac{15}{28}$$

$$p(X = 2) = \frac{3}{14}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

تصحيح التمرين الخامس

I.

1) أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$

إذن : $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$ **لكل** x **من** $\mathbb{R}$

ب-

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا : $g'(x) = (x^2 - x - \ln x)' = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

إذن : $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$

✓ لدينا : $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ إذن $g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

ولدينا $x > 0$ إذن : $\frac{2x+1}{x} > 0$ و منه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

x	$0 \quad 1 +\infty$
$x-1$	$- \quad 0 \quad +$

- على المجال $]0,1]$: لدينا $g'(x) \le 0$ إذن g تناقصية
- على المجال $[1,+\infty[$: لدينا $g'(x) \ge 0$ إذن g تزايدية

2) لدينا g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

إذن $g(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $]0,+\infty[$

إذن : $g(x) \ge g(1) \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن : $g(x) \ge 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

II.

1) أ- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \to 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty \end{cases}$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

ب-

✓

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2-1-(\ln x)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2.\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln(x))^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

✓ $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

ج- لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

2) أ-

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2-1-(\ln x)^2\right)' \\ &= 2x-0-2\ln'(x).\ln(x) \\ &= 2x-\frac{2\ln x}{x} \\ &= \frac{2x^2-2\ln x}{x} \\ &= 2.\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = 2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$ **لكل** x **من** $]0,+\infty[$

ب- ليكن $x \in]0,+\infty[$:

✓ $$\frac{g(x)}{x}+1 = \frac{x^2-x-\ln x}{x}+1 = \frac{x^2-x-\ln x+x}{x} = \frac{x^2-\ln x}{x}$$

إذن : $\frac{g(x)}{x}+1 = \frac{x^2-\ln x}{x}$ **لكل** x **من** $]0,+\infty[$

✓ لدينا : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln x}{x}\right)$

إذن : $f'(x)=2\left(\frac{g(x)}{x}+1\right)$

و لدينا حسب الجزء الأول 2) : $g(x)\geq 0$ و لدينا $x>0$

إذن : $f'(x)=2\left(\frac{g(x)}{x}+1\right)>0$ **لكل** x **من** $]0,+\infty[$

و منه الدالة f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

3) أ- معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$

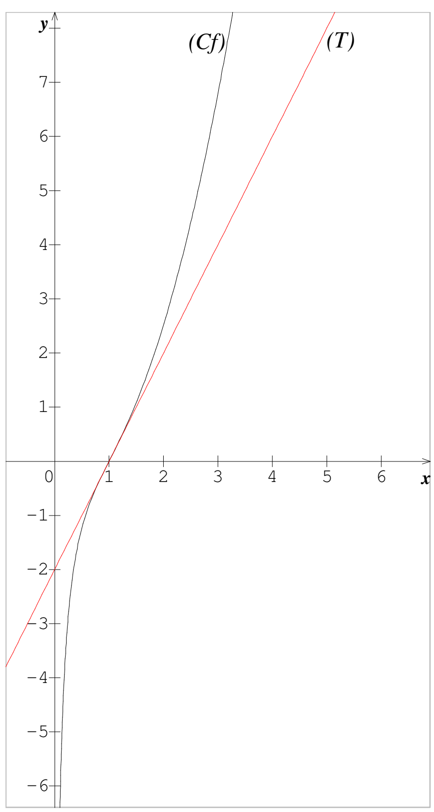
$y=f'(1).(x-1)+f(1)$

لدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=2\left(\frac{g(1)}{1}+1\right)=2$

إذن : $y=2.(x-1)+0$

و منه : $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$

ب-



4) أ-

✓ الدالة $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$H'(x) = \left(x(\ln x - 1)\right)' = (x)'.(\ln(x)-1) + x.(\ln(x)-1)' = 1.(\ln(x)-1) + x.\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$$

إذن $H'(x) = h(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

و بالتالي : $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$

- $\int_1^e \ln(x)dx = \left[x(\ln(x)-1)\right]_1^e = \left(e.(\ln(e)-1)\right) - \left(1.(\ln(1)-1)\right) = 1$

ب-

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \left[x(\ln(x))^2\right]_1^e - \int_1^e 2.\frac{x.\ln x}{x} \\ &= (e - 0) - 2\int_1^e \ln x dx \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$

$$A = \int_1^e |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

على المجال $[1,e]$: $f(x) \geq 0$

$$A = \int_1^e f(x) dx \times 1cm \times 1cm$$

$$A = \int_1^e \left(x^2 - 1 - (\ln(x))^2\right) dx .cm^2$$

$$A = \left(\int_1^e (x^2 - 1) dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx\right) .cm^2$$

$$A = \left(\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^e - \int_1^e (\ln x)^2 dx\right) .cm^2$$

$$A = \left(\left(\frac{e^3}{3} - e\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) - (e - 2)\right) .cm^2$$

و بالتالي : مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

هي $\frac{1}{3}\left(e^{3}-6e+8\right)cm^{2}$

つづく