أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول :

1 أ

لدينا : $\begin{cases}A(-3,0,0)\\B(0,0,-3)\\C(0,2,-2)\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}(3,0,-3)\\\overrightarrow{AC}(3,2,-2)\end{cases}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}0 & 2\\-3 & -2\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}3 & 3\\-3 & -2\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}3 & 3\\0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=6\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+6\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\left(6\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+6\vec{k}\right)$

و نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني : $\begin{pmatrix}x+3\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}=0$

يعني : $6(x+3)-3y+6z=0$

يعني : $2x-y+2z+6=0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب

لدينا : $\begin{cases}(ABC):2x-y+2z+6=0\\\Omega(1,1,1)\end{cases}$

إذن : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{|2\times1-1+2\times1+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=3$

نلاحظ إذن أن : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=3=Rayon(\mathcal{S})$

إذن : المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$.

2 أ

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (D) . لدينا $\begin{cases}(D)\perp(ABC)\\\Omega\in(D)\end{cases}$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists\theta\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}=\theta\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

يعني : $(\exists\theta\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=\theta\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$

يعني : $(D):\begin{cases}x-1=6\theta\\y-1=-3\theta\\z-1=6\theta\end{cases}\ ;\ (\theta\epsilon\mathbb{R})$

يعني : $(D):\begin{cases}x=6\theta+1\\y=-3\theta+1\\z=6\theta+1\end{cases}\ ;\ (\theta\epsilon\mathbb{R})$

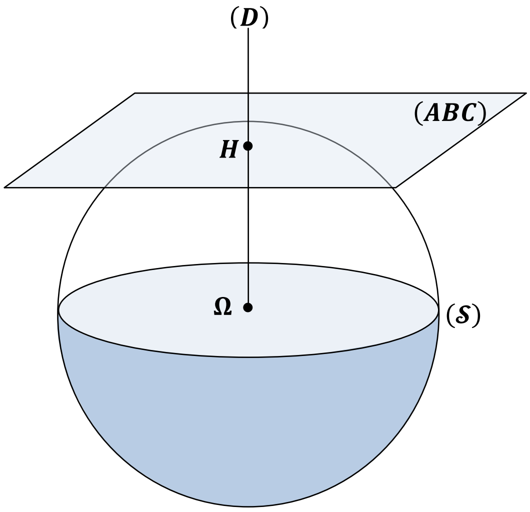
يعني : $(D):\begin{cases}x=2(3\theta)+1\\y=-(3\theta)+1\\z=2(3\theta)+1\end{cases}\ ;\ (\theta\epsilon\mathbb{R})$

نضع : $3\theta=t$ نحصل على : $(D):\begin{cases}x=2t+1\\y=-t+1\\z=2t+1\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ $(\mathcal{S})$ في H . فإن : $\boxed{(\Omega H)\perp(ABC)}$ (1)

و نعلم أن : $\boxed{(D)\perp(ABC)}$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $(\Omega H)\parallel(D)$

و بما أن : Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) .

فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان . يعني : $\boxed{H\epsilon(D)}$ (3)

حصلنا إذن على ما يلي : $\begin{cases}H\epsilon(D)\\H\epsilon(ABC)\end{cases}$

و لدينا : $(D):\begin{cases}x=2t+1\\y=-t+1\\z=2t+1\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

و لدينا كذلك : $\begin{cases}H(\alpha,\beta,\gamma)\\(ABC):2x-y+2z+6=0\end{cases}$

بما أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

فإن المثلوث (α,β,γ) يحقق كلاً من التمثيل البارمتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(\exists t\epsilon\mathbb{R}):\begin{cases}\alpha=2t+1\\\beta=-t+1\\\gamma=2t+1\\2\alpha-\beta+2\gamma+6=0\end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$2(2t+1)-(-t+1)+2(2t+1)+6=0$

يعني : $4t+t+4t+9=0$ إذن : $\boxed{t=-1}$

نعوض t بقيمته -1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1)+1 = -1 \\ \beta = -(-1)+1 = 2 \\ \gamma = 2(-1)+1 = -1 \end{cases}$$

و بالتالي : $H(-1,2,-1)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$

التمرين الثاني :

1 أ

لدينا :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{(8+3i)-(2-i)}{(6-7i)-(2-i)} = \frac{6+4i}{4-6i} = \frac{3+2i}{2-3i} = \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+13i-6}{2^2-(3i)^2} = \frac{13i}{4+9} = \frac{13i}{13} = i$$

و بالتالي : $\boxed{\frac{c-a}{b-a} = i} \quad (*)$

1 ب

لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = i$ إذن : $\begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |i| \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i) \ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} |c-a| = |b-a| \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} AC = AB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

2 أ

لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$. إذن : $aff(\Omega) = \frac{aff(B)+aff(C)}{2}$

يعني : $aff(\Omega) = \frac{(6-7i)+(8+3i)}{2} = (7-2i) = \omega$

2 ب

لدينا $\mathcal{R}$ دوران مُعرف بما يلي : $\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$

و ننطلق من الكتابة التالية : $\mathcal{R}(M) = M'$

$$\Leftrightarrow \ (z' - \omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z-\omega)$$

$$\Leftrightarrow \ z' - (7-2i) = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z-7+2i)$$

$$\Leftrightarrow \ z' - (7-2i) = (-i)(z-7+2i)$$

$$\Leftrightarrow \ z' = -iz + 7i + 2 + 7 - 2i$$

$$\Leftrightarrow \ z' = -iz + 5i + 9$$

و هذه الكتابة الأخيرة تُعَبِّرُ عن الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$.

و بذلك يصبح الدوران $\mathcal{R}$ مُعَرّف بما يلي : $\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(-iz+5i+9) \end{array}$

2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $aff(C) = -i\,aff(A) + 5i + 9$

لدينا حسب المعطيات : $aff(A) = a = (2-i)$

إذن : $-i\,aff(A) + 5i + 9 = -i(2-i) + 5i + 9 = -2i - 1 + 5i + 9 = 3i + 8 = aff(C)$

حصلنا إذن على : $-i\,aff(A) + 5i + 9 = aff(C)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$

التمرين الثالث :

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $\boxed{(P_n) : \ (\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1}$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$.

نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$

و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

> نحتاج إلى : $u_{n+1} > 1$
>
> يعني نحتاج إلى : $\frac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$
>
> يعني نحتاج إلى : $4u_n + 3 > 3u_n + 4$
>
> يعني نحتاج إلى : $u_n > 1$
>
> و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الإفتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .

و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$

إذن : $4u_n - 3u_n > 4 - 3$ يعني : $4u_n + 3 > 3u_n + 4$

يعني : $\frac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$ يعني : $u_{n+1} > 1$

أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

خلاصة : حصلنا على النتائج التالية : $\boxed{\begin{cases} (P_0) \ est \ vraie \\ (P_n) \ \Rightarrow \ (P_{n+1}) \ ; \ (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

2 أ

ليكن : $(n\in\mathbb{N})$. لدينا :

$$1 - v_n = 1 - \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+1} - \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{2}{u_n+1}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ 1 - v_n = \frac{2}{u_n+1}$

و نعلم حسب السؤال (1) أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n + 1 > 2 > 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ \frac{1}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ \frac{2}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ 1 - v_n > 0$

2 ب

ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا حسب السؤال أ) : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

إذن : $v_n(u_n+1)=u_n-1$

يعني : $v_nu_n+v_n=u_n-1$

أي : $v_nu_n-u_n=-1-v_n$

يعني : $u_n(v_n-1)=-1-v_n$

أي : $u_n=\frac{-1-v_n}{v_n-1}$ أي : $u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$

3 أ

لدينا حسب السؤال 2) أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;1-v_n=\frac{2}{u_n+1}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;v_n=1-\frac{2}{u_n+1}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;v_{n+1}=1-\frac{2}{u_{n+1}+1}$

$$=1-\frac{2}{\left(\frac{4u_n+3}{3u_n+4}+1\right)}=1-\frac{2}{\left(\frac{7u_n+7}{3u_n+4}\right)}$$

$$=1-\frac{2(3u_n+4)}{7u_n+7}=\frac{7u_n+7-6u_n-8}{7u_n+7}$$

$$=\frac{(u_n-1)}{7(u_n+1)}=\frac{1}{7}v_n$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;v_{n+1}=\frac{1}{7}\,v_n$

يعني : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن الحد العام v_n يكتب على الشكل التالي : $v_n=v_0\left(\frac{1}{7}\right)^{n-0}$

لدينا : $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$ إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;v_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

3 ب

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$ و منه : $\lim_{n\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$

يعني : $\lim_{n\infty}(v_n)=0$

و لدينا حسب السؤال 2) أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;1-v_n=\frac{2}{u_n+1}$

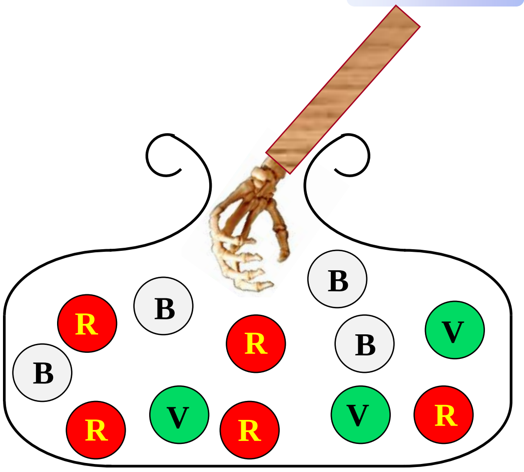
يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;u_n+1=\frac{2}{1-v_n}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;u_n=\frac{2}{1-v_n}-1$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(u_n)=\lim_{n\infty}\left(\frac{2}{1-v_n}-1\right)=\frac{2}{1-0}-1=1$

يعني : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n)=1}$

التمرين الرابع :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تَحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega)=C_{12}^3=220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)=\frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)}=\frac{C_5^3}{220}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$$

2

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون}\right)=p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء أو الحصول على ثلاث كرات بيضاء أو الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$=p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)+p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right)+p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$=\frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)}+\frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right)}{card(\Omega)}+\frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)}{card(\Omega)}$$

$$=\frac{C_5^3}{220}+\frac{C_4^3}{220}+\frac{C_3^3}{220}=\frac{10}{220}+\frac{4}{220}+\frac{1}{220}=\frac{15}{220}=\frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

<u>الطريقة الأولى :</u>

$$p\left(\text{الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل}\right)=p\left(\text{كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر أو كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر أو ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$=p\left(\text{كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر}\right)+p\left(\text{كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر}\right)+p\left(\text{ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$=\frac{C_5^1\times C_7^2}{card(\Omega)}+\frac{C_5^2\times C_7^1}{card(\Omega)}+\frac{C_5^3\times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$=\frac{5\times 21}{220}+\frac{10\times 7}{220}+\frac{10}{220}=\frac{185}{220}=\frac{37}{44}$$

الطريقة الثانية : استعمال تقنية الحدث المضاد .

إذا كان $\bar{A}$ هو الحدث المضاد للحدث A فإن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع : $A = \{$ الحصول على كرة واحدة على الأقل $\}$

إذن : $\bar{A} = \{$ الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر $\}$

$p($ ثلاث كرات تخالف اللون الأحمر $) = p($ كرتين خضراوين و الأخرى بيضاء أو كرتين بيضاوين و الأخرى خضراء أو ثلاث كرات خضراء أو ثلاث كرات بيضاء $)$

$= p($ ثلاث كرات بيضاء $) + p($ ثلاث كرات خضراء $) + p($ كرتين بيضاوين و الأخرى خضراء $) + p($ كرتين خضراوين و الأخرى بيضاء $)$

$$= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220}$$

$$= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

إذن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

يعني : $p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44-7}{44} = \frac{37}{44}$

و بالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو : $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس :

1

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

إذن :
$$f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$$
$$= -x + \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x} = -\left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = -f(x)$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(-x) = -f(x)$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .

2

لدينا :
$$x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$$
$$= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

3 أ

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

إذن :
$$(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 - \left(\frac{2}{e^x + 1}\right)'$$
$$= 1 - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2}\right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

من أجل $x = 0$ نحصل على :
$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3 ب

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ 2e^x > 0$ و $(e^2 + 1)^2 > 0$

و منه : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3 ج

نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة x_0 تُكتب على الشكل :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

إذن من أجل $x_0 = 0$ نجد : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني : $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$

و لدينا : $f(0) = 0$ و $f'(0) = \frac{3}{2}$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تُصبح : $(T) : y = \frac{3}{2}x$

4 أ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}\right)$$
$$= \left(+\infty + 1 - \frac{2}{+\infty}\right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$

4 ب

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1)\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1}\right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

و منه : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 1$

و لدينا من جهة أخرى :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

إذن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم : $(D) : y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4 ج

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x+1)$.

لدينا :

$$f(x) - (x+1) = (x+1) - \frac{2}{e^x+1} - (x+1) = \frac{-2}{e^x+1}$$

و نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; e^x > 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; e^x + 1 > 0$

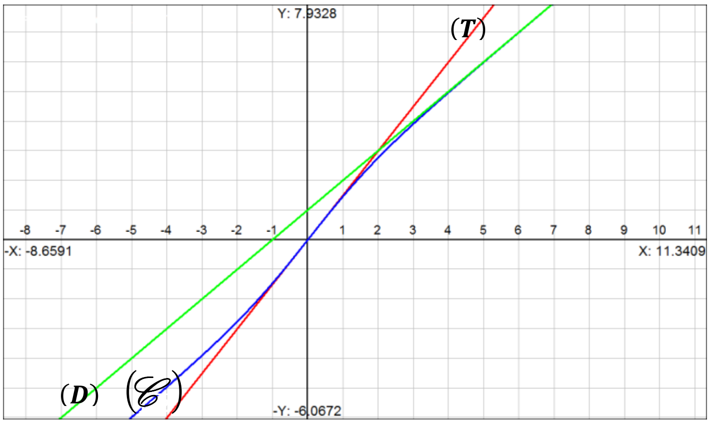
يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; \dfrac{-2}{e^x+1} < 0$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f(x) - (x+1) < 0$

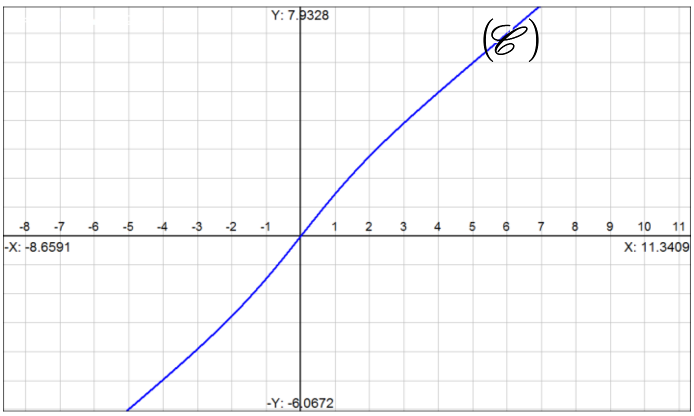
يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f(x) < (x+1)$

و بالتالي : المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى $(\mathscr{C})$

5



المنحنى $(\mathscr{C})$ لوحده



6 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x - \ln(e^x+1))' \\ &= 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} = h(x) \end{aligned}$$

إذن H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

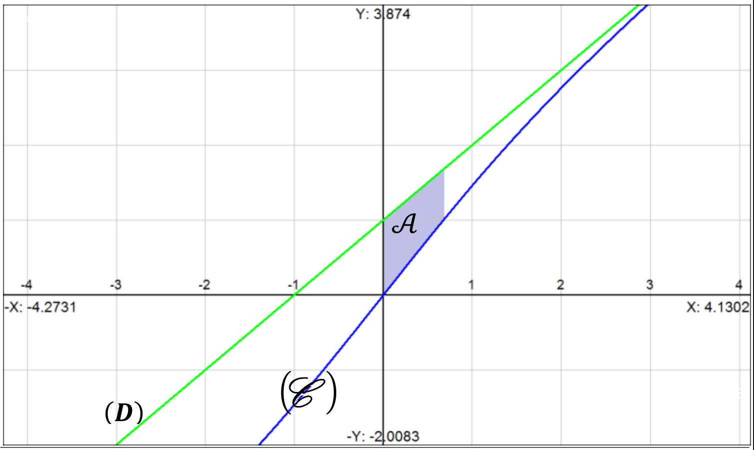
6 ب

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx &= \int_0^{\ln 2} h(x)\, dx = [H(x)]_0^{\ln 2} \\ &= [x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2) \\ &= 2\ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

6 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$. لدينا :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x+1)|\, dx = \int_0^{\ln 2} \left|\frac{-2}{e^x+1}\right| dx \\ &= 2\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx = 2\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) \approx 0{,}57 \; unité^2 \end{aligned}$$



صورة أخرى للمساحة $\mathcal{A}$