أجوبة امتحان الدورة العادية 2011

التمرين الأول :

1 أ

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2+4x-5=0$.

لدينا : $\Delta = 4^2-4(-5) = 16+20 = 36$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين x_1 و x_2 معرفين بما يلي :

$$x_1 = \frac{-4-6}{2} = -5 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-4+6}{2} = 1$$

1 ب

لنحل في $]0;+\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2+5) = \ln(x+2)+\ln(2x)$

نستعمل قواعد الدالة ln نجد : $\ln(x^2+5) = \ln\big(2x(x+2)\big)$

يعني : $\ln(x^2+5) = \ln(2x^2+4x)$

أي : $e^{\ln(x^2+5)} = e^{\ln(2x^2+4x)}$

يعني : $x^2+5 = 2x^2+4x$

و منه : $x^2+4x-5=0$

و هذه المعادلة تقبل في $\mathbb{R}$ الحلين -5 و 1 .

بما أن : $-5 \notin\ ]0;+\infty[$ و $1 \in\ ]0;+\infty[$.

فإن المعادلة : $\ln(x^2+5) = \ln(x+2)+\ln(2x)$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ و هو 1 .

2

لنحل في $]0;+\infty[$ المتراجحة $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$

هذه المتراجحة تصبح : $\ln(x^2+x) \geq \ln(x^2+1)$

بما أن الدالة ln تقابل من $\mathbb{R}_*^+$ نحو $\mathbb{R}$ فإن المتراجحة تصبح :

$x^2+x \geq x^2+1$

يعني : $x \geq 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المتراجحة هي جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 1 . أو بتعبير آخر : $\mathcal{S} = [1;+\infty[$

التمرين الثاني :

1

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة بما يلي : $(P_n) : \ (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$

لدينا : $1 > 0$ إذن : $u_0 = 1 > 0$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ 5+8u_n > 5 > 0$

و هذا يعني أن الكميتين u_n و $(5+8u_n)$ موجبتين قطعا .

إذن $\dfrac{u_n}{5+8u_n}$ كمية موجبة قطعا .

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \dfrac{u_n}{5+8u_n} > 0$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} > 0$

إذن : العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على النتائج التالية : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \implies (P_{n+1})\ ;\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا : $v_n = \dfrac{1}{u_n}+2$

إذن :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}+2 = \frac{1}{\left(\dfrac{u_n}{5+8u_n}\right)}+2 = \frac{5+8u_n}{u_n}+2$$

$$= \frac{5+10u_n}{u_n} = \frac{5}{u_n}+10 = 5\left(\frac{1}{u_n}+2\right) = 5v_n$$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = 5\,v_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية و أساسها هو العدد 5 .

و منه فإن الحد العام v_n لهذه المتتالية يُكتب على الشكل :

$$v_n = v_0 5^{n-0} = \left(\frac{1}{u_0}+2\right)5^n = \left(\frac{1}{1}+2\right)5^n = 3\times 5^n$$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = 3\times 5^n$

2 ب

نعلم أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = \dfrac{1}{u_n}+2$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n - 2 = \dfrac{1}{u_n}$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{1}{v_n-2}$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$

نلاحظ أن التعبير 5^n عبارة عن متتالية هندسية أساسها 5 و هو عدد حقيقي أكبر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty} 5^n = +\infty$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{3\times 5^n-2}\right) = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

إذن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$

التمرين الثالث :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-18z+82=0$

لدينا : $\Delta = (-18)^2 - 4\times 82 = -4 = (2i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{18-2i}{2} = 9-i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{18+2i}{2} = 9+i$$

2 أ

لدينا : $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{(11-i)-(9-i)}{(9+i)-(9-i)} = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{1\times i}{i\times i} = -i$

إذن : $\dfrac{c-b}{a-b} = -i$

و من هذه الكتابة الأخيرة نحصل على :

$$\begin{cases} \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) \equiv \arg(-i)\ [2\pi] \\ \left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = |-i| \end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases} \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ \left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = 1 \end{cases}$$

أي : $\begin{cases} (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ |c-b| = |a-b| \end{cases}$ أي : $\begin{cases} (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ BC = BA \end{cases}$

و من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في نفس النقطة B .

ملاحظة : إذا كان $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ نقول أن ABC مثلث قائم الزاوية مباشر . و إذا كان $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ نقول أن ABC مثلث قائم الزاوية غير مباشر .

2 ب

لدينا : $|4(1-i)| = 4\sqrt{1^2+(-1)^2} = 4\sqrt{2}$

إذن : $4(1-i) = 4\sqrt{2}e^{i\theta}$

لنبحث الآن عن العمدة θ .

و من أجل ذلك ننطلق من : $4(1-i) = 4\sqrt{2}\cos\theta + i\,4\sqrt{2}\sin\theta$

يعني : $\begin{cases} 4 = 4\sqrt{2}\cos\theta \\ -4 = 4\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$

إذن : $\theta \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

و بالتالي : $4(1-i) = 4\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

2 ج

لدينا : $(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i)$

و منه : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

يعني : $|(c-a)(c-b)| = |4(1-i)|$

يعني : $|c-a| \times |c-b| = 4|1-i|$

إذن : $|c-a| \times |c-b| = 4\sqrt{2}$

يعني : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

2 د

لدينا $\mathcal{R}$ دوران معرف بما يلي : $\mathcal{R}_B\left(\frac{3\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$

ننطلق من المعطى : $\mathcal{R}(M) = M'$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران : $(z'-b) = e^{\frac{i3\pi}{2}}(z-b)$

يعني : $(z'-9+i) = -i(z-9+i)$

يعني : $z'-9+i = -iz+9i+1$

يعني : $z' = -iz+8i+10$

إذن الدوران $\mathcal{R}$ يصبح : $\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(-iz+8i+10) \end{array}$

لدينا : $-ic+8i+10 = -i(11-i)+8i+10$

$= -11i-1+8i+10 = -3i+9 = c' = aff(C')$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(C) = C'$

و كذلك : $aff(C') = c' = 9-3i$

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

إذن : $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g'(x) = -xe^x$

I 1 ب

إذا كان $x\ \epsilon\ [0,+\infty[$ فإن : $-xe^x \leq 0$

و منه : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g'(x) \leq 0$

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية على $[0;+\infty[$.

إذا كان : $x\ \epsilon\ ]-\infty;0]$ فإن : $-xe^x \geq 0$

و منه : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g'(x) \geq 0$

و هذا يعني أن الدالة g تزايدية على $]-\infty;0]$.

و لدينا : $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

I 2

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان : $x \geq 0$

فإن : $g(x) \leq g(0)$ لأن g تناقصية على $[0;+\infty[$.

و منه : $(\forall x \geq 0)\ ;\ g(x) \leq 0$

الحالة الثانية : إذا كان : $x \leq 0$

فإن : $g(x) \leq g(0)$ لأن g تزايدية على $]-\infty;0]$.

و منه : $(\forall x \leq 0)\ ;\ g(x) \leq 0$

نلاحظ في كلتا الحالتين أن : $g(x) \leq 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) \leq 0$

II 1 أ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^x - x = (2-\infty)e^{+\infty} - \infty$$
$$= (-\infty)(+\infty) - \infty = -\infty - \infty = -\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ $(\mathbf{1})$

II 1 ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x}-1\right)e^x - 1$

$$= \left(\frac{2}{x}-1\right)e^{+\infty} - 1 = (0-1)(+\infty) - 1$$
$$= (-1)(+\infty) - 1 = -\infty - 1 = -\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ $(\mathbf{2})$

نستنتج إذن من النتيجتين $(\mathbf{1})$ و $(\mathbf{2})$ أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

II 2 أ

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^x - x$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{2e^x}_{0^+} - \underbrace{xe^x}_{0^-} - \underbrace{x}_{-\infty}\right)$$

$$= 2\times 0 - 0 - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ **(3)**

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}(2-x)e^x$

$= \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x = 0-0=0$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0}$ **(4)**

II 2 ب

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)e^x - 1$

$=\left(\frac{2}{-\infty}-1\right)e^{-\infty}-1=(0-1)(0)-1=-1$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1}$ **(5)**

من النهايات (**3**) و (**4**) و (**5**) نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته : $(D): y=-1x+0$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x)=(2-x)e^x-x$

إذن : $f'(x) = -e^x+(2-x)e^x-1$

$=(-1+2-x)e^x-1$

$=(1-x)e^x-1$

$=g(x)$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$

II 3 ب

النتيجة $f'(0)=0$ تعني هندسيا أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا أفقيا (موازي لمحور الأفاصيل) بجوار النقطة ذات الأفصول 0 .

II 3 ج

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$

و نعلم حسب نتيجة السؤال I 2) أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g(x)\le 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)\le 0$

و هذا يعني أن الدالة f تناقصية على $\mathbb{R}$.

و نضع جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
f	$+\infty$	2	$-\infty$

II 4

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

إذن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

و منه كل عنصر من $\mathbb{R}$ يمتلك سابقا واحدا من $\mathbb{R}$ بالدالة f .

لدينا : $0\in\mathbb{R}$ إذن : $(\exists!\ \alpha\in\mathbb{R})\ ;\ f(\alpha)=0$

يعني أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ و هو العدد α .

و لدينا : f دالة متصلة على المجال $\left[\frac{3}{2};2\right]$. **(2)**

و لدينا كذلك : $f(2)=(2-2)e^2-2=-2<0$

إذن : $\boxed{f(2)<0}$ **(2)**

و لدينا كذلك : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}$

بما أن : $e^{\frac{3}{2}}>3$ فإن : $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}>\frac{3}{2}$

و منه : $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}>0$ أي : $\boxed{f\left(\frac{3}{2}\right)>0}$ **(3)**

من النتيجتين (**2**) و (**3**) نستنتج أن : $\boxed{f(2)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0}$ **(4)**

إذن من النتيجتين **(1)** و **(4)** نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية (TVI)

أن : $\exists!\ \alpha\in\left]2;\frac{3}{2}\right[\ ;\ f(\alpha)=0$

و بالتالي : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 2 و $\frac{3}{2}$

النقطة ذات الأفصول α هي نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل .

II 5 أ

المعادلة $f(x)+x=0$ تصبح : $(2-x)e^x-x+x=0$

يعني : $(2-x)e^x=0$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x\neq 0$

إذن : $2-x=0$ و منه : $x=2$

إذن أفصول نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x$

هو 2 و أرتوبها هو : $f(2)=-2$

و بالتالي : $(\mathscr{C})$ و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2;-2)$.

II 5 ب

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)+x=(2-x)e^x$

إذن : إشارة $f(x)+x$ تتعلق فقط بإشارة $(2-x)$

و ذلك لأن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x>0$

إذا كان : $x=2$ فإن : $f(x)+x=0$.

إذا كان : $x>2$ فإن : $f(x)+x<0$.

إذا كان : $x<2$ فإن : $f(x)+x>0$.

II 5 ج

نستنتج من السؤال ب) أنه :

- إذا كان : $x>2$ فإن : $f(x)<$
- إذا كان : $x<2$ فإن : $f(x)>$

إذن : $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]-\infty;2[$.

و $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (D) على المجال $]2;+\infty[$.

II 6 أ

لدراسة نقط الإنعطاف ندرس النقط التي تنعدم فيها المشتقة الثانية f'' .

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. و نريد أن نحل المعادلة : $f''(x)=0$

لدينا : $f''(x)=g'(x)=-xe^x$

إذن المعادلة تصبح : $-xe^x=0$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^0\neq 0$

إذن المعادلة تصبح : $x=0$

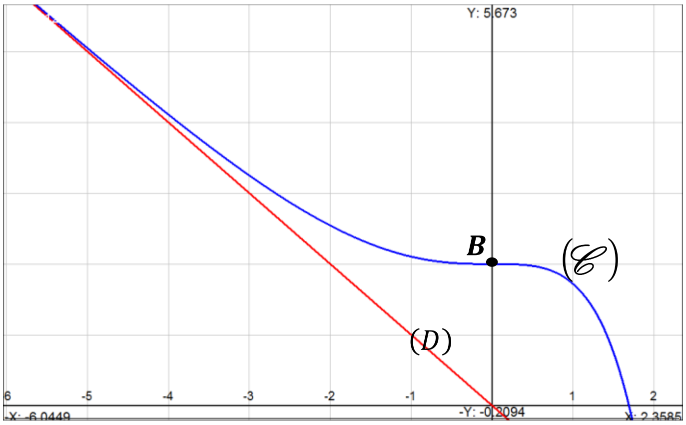
و منه : فالمعادلة تقبل حلا وحيدا و هو الصفر .

يعني أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف واحدة أفصولها 0 .

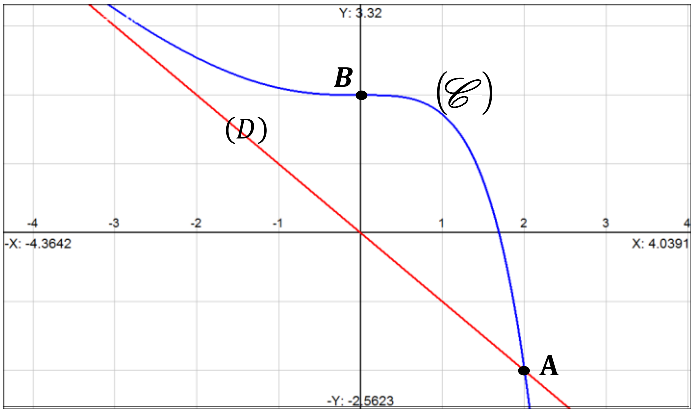
و أرتوبها هو $f(0)=2$

أي : $B(0;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$

II 6 ب



أضفت الصورة الأولى لنرى بوضوح ما يقع بجوار $-\infty$.



II 7 أ

لدينا :

$$\int_{-1}^{0} \underbrace{(2-x)}_{u}\ \underbrace{e^x}_{v'}\ dx = [uv]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u'v\,dx$$

$$= [(2-x)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^x\,dx$$

$$= [(2-x)e^x]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x\,dx$$

$$= [(2-x)e^x]_{-1}^{0} + [e^x]_{-1}^{0}$$

$$= \left(2-\frac{3}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{e}\right) = \boxed{3-\frac{4}{e}}$$

إذن : $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2-x)\ e^x\ dx = 3-\frac{4}{e}$

II 7 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طول أو مساحة أو حجم .

إذن : $\displaystyle\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x)-(-x)|\,dx = \int_{-1}^{0} |f(x)+x|\ \ dx$

من خلال دراسة إشارة $(f(x)+x)$ حسب $(II\ 5)$ ب)

نكتب : $(\forall x < 2)\ ;\ f(x)+x > 0$

إذن : $(\forall x < 2)\ ;\ |f(x)+x| = f(x)+x$

و منه : $\displaystyle\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x)+x|\ \ dx = \int_{-1}^{0} (f(x)+x)\,dx$

$$= \left(3-\frac{4}{e}\right)\ unité^2$$

إذن : $\mathcal{A} = \left(3-\dfrac{4}{e}\right)\ unité^2$

بما أن : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$ فإن : $l'unité = 2cm$

إذن : $(l'unité)^2 = 4\ cm^2$

و بالتالي : $\mathcal{A} = 4\left(3-\dfrac{4}{e}\right)\ cm^2 = \left(12-\dfrac{16}{e}\right)cm^2$