



$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4t + 2 \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{يعني :}$$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامترى للمستقيم  $(\Delta)$ .



$$\begin{cases} (ABC) : 4y + 3z + 8 = 0 \\ \text{لدينا :} \\ (\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

نعلم أن  $H(\alpha, \beta, \gamma)$  هي نقطة تماس الفلكة  $(S)$  و المستوى  $(ABC)$ .

$$\text{إذن : } (1) \quad \overline{\Omega H} \perp \overline{(ABC)}$$

و نعلم كذلك أن : (2)  $\overline{(\Delta)} \perp \overline{(ABC)}$  و (3)  $\overline{\Omega \epsilon(\Delta)}$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :  $(\Omega H) = (\Delta)$  يعني  $H \in (\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة  $H$  نطلق من النظمة التالية :  $\begin{cases} H \in (\Delta) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4t + 2 \\ \gamma = 3t + 3 \\ 4\beta + 3\gamma + 8 = 0 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و هذه النظمة تكافئ :}$$

نعوض قيم  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

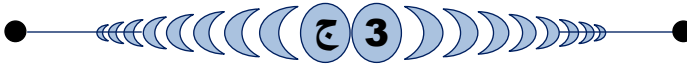
$$4(4t + 2) + 3(3t + 3) + 8 = 0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على :  $t = -1$

نعوض  $t$  بالعدد  $-1$  في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4(-1) + 2 = -2 \\ \gamma = 3(-1) + 3 = 0 \end{cases}$$

و بالتالي :  $H(1; -2; 0)$  هي نقطة تقاطع  $(\Delta)$  و المستوى  $(ABC)$ .



للتحقق من أن  $H(1; -2; 0)$  هي نقطة تماس المستوى  $(ABC)$  و الفلكة  $(S)$  يكفي أن نتحقق من أن مثلث إحداثيات النقطة  $H$  يحقق كلا من معادلتى المستوى  $(ABC)$  و الفلكة  $(S)$ .

$$\begin{cases} \text{لدينا :} \\ (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \\ (ABC) : 4y + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

يكفي إذن أن نعوض  $x$  و  $y$  و  $z$  على التوالي بالأعداد  $1$  و  $-2$  و  $0$

في معادلتى  $(ABC)$  و  $(S)$  و نرى هل تتحقق المتساويات.

$$\text{لدينا : } 1^2 + (-2)^2 + 0^2 - 2 \times 1 - 4(-2) - 6 \times 0 - 11 = 0$$

إذن :  $H \in (S)$

$$\text{و لدينا كذلك : } 4(-2) + 3(0) + 8 = -8 + 8 = 0$$

إذن :  $H \in (ABC)$

و بالتالي :  $H$  هي نقطة تماس المستوى  $(ABC)$  و الفلكة  $(S)$ .

### التمرين الثاني :



$$\text{نحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$

$$\text{لدينا : } \Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2$$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين  $z_1$  و  $z_2$  المعرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$$

## أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

### التمرين الأول :



لدينا الفلكة  $(S)$  معرفة بمعادلتها الديكارية التالية :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 - 6z) - 11 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 11 = 14 \quad \text{يعني :}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \quad \text{يعني :}$$

إذن  $(S)$  فلكة مركزها  $\Omega(1; 2; 3)$  و شعاعها  $R = 5$ .



لدينا :  $A(0; -2; 0)$  و  $B(1; 1; -4)$  و  $C(0; 1; -4)$ .

إذن :  $\overline{AB}(1; 3; -4)$  و  $\overline{AC}(0; 3; -4)$ .

$$\begin{aligned} \overline{AB} \wedge \overline{AC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{و منه :} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 0\vec{i} - (-4)\vec{j} + 3\vec{k} \\ &= 4\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من المستوى  $(ABC)$ .

بما أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  متجهة منظمية على المستوى  $(ABC)$ .

فإن : المتجهتان  $\overline{AM}$  و  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  متعامدتان.

$$\text{يعني أن : } \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y + 2 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$4y + 3z + 8 = 0 \quad \text{يعني : } 0x + 4(y + 2) + 3z = 0$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$ .



لدينا :  $\Omega(1, 2, 3)$  و  $(ABC) : 4y + 3z + 8 = 0$

$$\text{إذن : } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0 + 8 + 9 + 8|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5$$

نلاحظ أن :  $d(\Omega, (ABC)) = R$

إذن المستوى  $(ABC)$  مماس للفلكة  $(S)$  في النقطة  $H(\alpha, \beta, \gamma)$



علما أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(0, 4, 3)$  منظمية على المستوى  $(ABC)$ .

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من المستقيم  $(\Delta)$ .

بما أن  $(\Delta)$  مار من  $\Omega$  و عمودي على  $(ABC)$ .

فإن المتجهتان  $\overline{AM}$  و  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  متجهتان مستقيمتان.

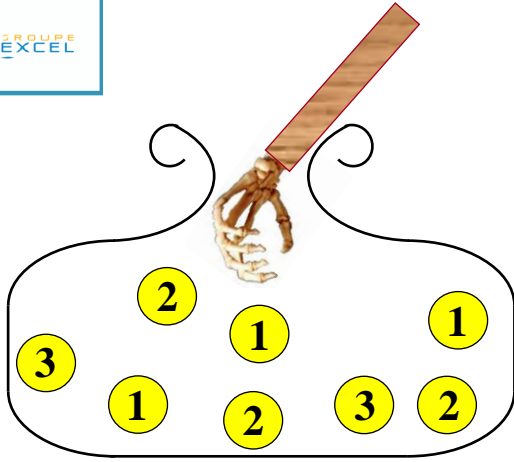
$$\text{يعني : } (\exists t \in \mathbb{R}) ; \overline{AM} = t \vec{n}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x - 1 = 0t \\ y - 2 = 4t \\ z - 3 = 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ \widehat{ABC} = 60^\circ \end{cases} \text{ أو بتعبير آخر :}$$

و هذا يعني أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين رأسه  $B$  و قياس الزاوية  $\widehat{B}$  هو  $60^\circ$  .  
و بالتالي :  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع .

### التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد  $C_8^1$  إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد  $C_7^1$  إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتل  $C_8^1 \times C_7^1$  نتيجة ممكنة .

$$\text{يعني : } \text{card}(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$$

بحيث :  $\Omega$  هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

### 1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

$C_3^1$  إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

$C_2^1$  إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

**الحالة الأولى :** الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3

بـ  $C_2^1 \times C_7^1$  إمكانية .

**الحالة الثانية :** الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3

بـ  $C_6^1 \times C_2^1$  إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

### 2

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن

نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

### 2

$$\begin{cases} aff(A) = a = 8i \\ aff(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ aff(C) = c = 2(4\sqrt{3} + 4i) \\ aff(M) = z \\ aff(M') = z' \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\mathcal{R}_0\left(\frac{4\pi}{3}\right) : (P) \mapsto (P) \quad \text{و لدينا الدوران } \mathcal{R} \text{ معرف بما يلي :}$$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

$$(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0) \quad \text{إذن حسب التعريف العقدي للدوران } \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R}(M) = M' \quad \text{ننتقل من الكتابة :}$$

$$z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z \quad \text{يعني :}$$

$$z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z \quad \text{يعني :}$$

$$z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z \quad \text{يعني :}$$

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z \quad \text{يعني :}$$

### 2

$$\text{لدينا : } aff(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8i \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -4i + 4\sqrt{3} = aff(B)$$

حصلنا إذن على العلاقة التالية :  $aff(A) = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times aff(B)$

و هي نفسها الكتابة العقديّة للدوران  $\mathcal{R}$

و من تلك الكتابة نستنتج أن :  $\mathcal{R}(A) = B$

### 2

$$\frac{a - b}{c - b} = \frac{8i - (4\sqrt{3} - 4i)}{2(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)}$$

$$= \frac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)}{4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3}i - 1)}{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - 1)} = \frac{(\sqrt{3}i)^2 - 2(\sqrt{3}i) + 1^2}{(\sqrt{3}i)^2 - 1}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{-2}{-4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\text{إذن : } \frac{a - b}{c - b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

### 2

$$\begin{cases} \left| \frac{a - b}{c - b} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a - b}{c - b}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ حصلنا على : } \frac{a - b}{c - b} = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ يعني :}$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ يعني : } \begin{cases} |a - b| = |c - b| \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$



يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{3u_n}{21 + u_n} > 0$

أي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 0$

يعني أن العبارة  $(P_{n+1})$  عبارة صحيحة .

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

## 2

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا  $u_n > 0$  إذن التعبير  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  مُعَرَّفٌ (المقام يجب أن يخالف الصفر)

$$\text{لدينا : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n}{21 + u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$$

$$\text{إذن : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$$

نعلم أن :  $u_n > 0$  إذن :  $21 + u_n > 21$

$$\text{يعني : } \frac{1}{21 + u_n} < \frac{1}{21} \quad \text{يعني : } \frac{3}{21 + u_n} < \frac{3}{21}$$

$$\text{يعني : } \frac{3}{21 + u_n} < \frac{1}{7} \quad \text{يعني : } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{7}$$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

## 3

نعلم أن :  $\frac{1}{7} < 1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا  $u_n$  نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{7} u_n < u_n \quad (1)$$

و نعلم كذلك حسب السؤال (2) أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$  (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

و بالتالي :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ( $u_n > 0$ ) فإنها متقاربة .

## 4

من أجل  $n = 0$  لدينا :  $u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل  $n = 0$

نفترض أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال (2) :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n \leq \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل  $(n + 1)$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

## 4

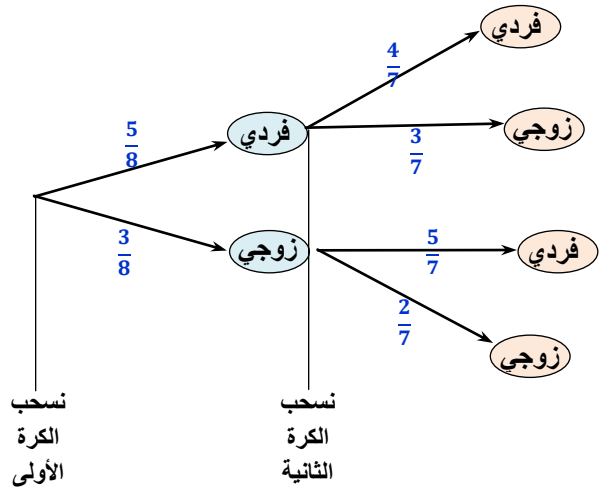
لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن :  $\left(\frac{1}{7}\right)^n$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{7}$  و هو عدد موجب و أصغر من 1

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي : 0 أو 1 أو 2

أو بتعبير أجمل :  $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تمّ الحصول عليها انطلاقا من التجربة العشوائية ( السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



## 2

$p[X = 1]$  هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X = 1] = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

## 2

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  التطبيق التالي :

$$P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$$

لدينا حسب السؤال (1) :  $p(A) = \frac{3}{28}$  إذن :  $p[X = 0] = \frac{3}{28}$

و لدينا كذلك :  $p[X = 2] = 1 - p[X = 0] - p[X = 1]$

$$= 1 - \frac{3}{28} - \frac{15}{28} = \frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  هو التطبيق  $P_X$  المعروف

بما يلي :  $P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$

$$0 \mapsto p[X = 0] = \frac{3}{28}$$

$$1 \mapsto p[X = 1] = \frac{15}{28}$$

$$2 \mapsto p[X = 2] = \frac{5}{14}$$

### التمرين الرابع :

## 1

نبرهن على صحة العبارة  $(P_n)$  التالية :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$   $(P_n)$

لدينا :  $u_0 = 1 > 0$  إذن العبارة  $(P_0)$  صحيحة .

نفترض أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

إذن :  $u_n$  كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان  $3u_n$  و  $u_n + 21$  موجبتان قطعا كذلك .

إذن الكمية  $\frac{3u_n}{u_n + 21}$  موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين .



فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بالتالي :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة و تؤول على الصفر .  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

**التمرين الخامس :**

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . لدينا :

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2$$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . لدينا :

$$g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$$

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . يعني :  $x > 0$

$$3x^2 + 3x + 2 > 0 \text{ و } x > 0$$

ومنه :  $\frac{3x^2+3x+2}{x}$  موجبة قطعيا باعتبارها خارج كمتبتين موجبتين قطعيا .

$$(\forall x > 0) ; \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  .

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

$$(\forall x > 0) ; \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$$

إذن : إشارة  $g'(x)$  تتعلق فقط بإشارة  $(x-1)$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; 1[$  . إذن :  $x \leq 1$

$$g'(x) \leq 0 \text{ و منه } (x-1) \leq 0$$

يعني أن الدالة  $g$  تناقصية على المجال  $]0,1[$  .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]1; +\infty[$  . إذن :  $x \geq 1$

$$g'(x) \geq 0 \text{ يعني } (x-1) \geq 0$$

يعني أن الدالة  $g$  تزايدية على المجال  $]1; +\infty[$  .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  . نفصل بين حالتين :

**الحالة الأولى :**  $x \in ]0,1[$  يعني :  $x \leq 1$

إذن :  $g(x) \geq g(1)$  ( لأن  $g$  تناقصية على  $]0; 1[$  )



ولدينا :  $g(1) > 0$  . إذن :  $\forall x \in ]0; 1[ ; g(x) > 0$

**الحالة الثانية :**  $x \in [1; +\infty[$  يعني :  $x \geq 1$

إذن :  $g(x) \geq g(1)$  ( لأن  $g$  تزايدية على  $]1; +\infty[$  )

ولدينا :  $g(1) > 0$  . إذن :  $\forall x \in [1; +\infty[ ; g(x) > 0$

من النتجتين (1) و (2) نستنتج أن :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; g(x) > 0$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  .

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x(x - 1 + \ln x)}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln x}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{-x^2 + 3x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x^3 - x - 2 \ln x + 3}{x^3}$$

و بالتالي :  $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال (3) ب) :  $g(x) > 0$  ;  $(\forall x > 0)$

ولدينا :  $x^3 > 0$  ;  $(\forall x > 0)$

إذن :  $\frac{g(x)}{x^3} > 0$  ;  $(\forall x > 0)$

يعني :  $f'(x) > 0$  ;  $(\forall x > 0)$

و بالتالي :  $f$  دالة تزايدية قطعيا على المجال  $]0; +\infty[$  .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - 1 + \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) \right)$$

$$\begin{matrix} \nearrow 0^+ & \nearrow 0^+ & \nearrow 0^+ \\ +\infty & +\infty & -\infty \end{matrix}$$

$$= 0 - 1 + (+\infty)(1 - \infty - \infty)$$

$$= -1 + (+\infty)(+\infty) = -1 - \infty = -\infty$$

و بالتالي :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (محور الأرتايب) مقارب عمودي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار الصفر على اليمين

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; +\infty[$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 0(1 - 0 + 0) = 0$$

**5 II**

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_v dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$



**5 II**

لتكن  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحني  $(\mathcal{E})$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = e$  و  $x = 1$ .  
نقيس المساحة  $\mathcal{A}$  باستعمال التكامل التالي:

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (x+1)| dx = \int_1^e \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| dx$$

ولدينا:  $x \in [1, e]$  إذن: (1)  $x > 1$  و منه: (2)  $\ln x > 0$

نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد:  $x + \ln x > 1$

يعني:  $\forall x \in [1, e]; x - 1 + \ln x > 0$

و منه:  $\forall x \in [1, e]; \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} > 0$

أي:  $\forall x \in [1, e]; \left| \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right| = \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة  $\mathcal{A}$  نجد:

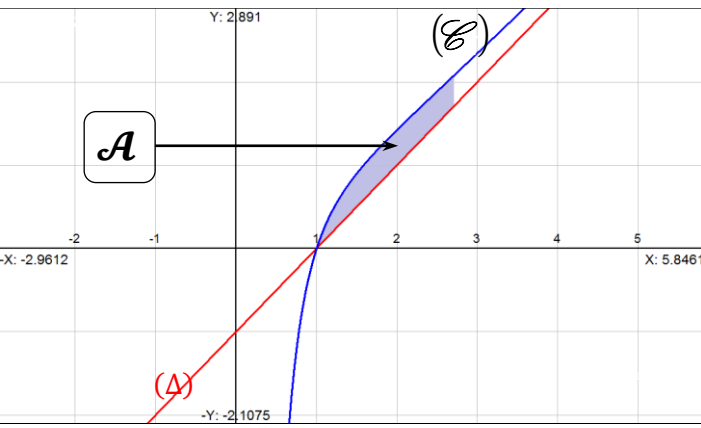
$$\mathcal{A} = \int_1^e \left| \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right| dx = \int_1^e \left( \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e + \left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{e} + 1\right) + \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) \text{ unité}^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right) (1 \text{ cm})^2 = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ cm}^2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right)$$

$$= (+\infty) + 0 = +\infty$$

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  إذن:

**2 II**

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{x - 1 + \ln x}{x^3} \right)$$

$$= 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 1 + 0(1 - 0 + 0) = 1$$

(2)

إذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

و لدينا كذلك:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right)$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

(3)

إذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحني  $(\mathcal{E})$  بجوار  $+\infty$ .

**3 II**

معادلة المماس  $(T)$  للمنحني  $(\mathcal{E})$  في النقطة التي زوج إحداثياتها  $(1, 0)$

تكتب على الشكل:  $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

لدينا:  $f'(1) = 3$  و  $f(1) = 0$

إذن:  $(T) : y = 3(x - 1)$

