تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2009

تقديـــم: ذ. الوظيفي

التمرين الأول :

1) لدينا : $\overrightarrow{OC}(2;-1;0)$

و $\overrightarrow{OD}(0;1;-1)$

إذن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

ومنه : $\boxed{\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}$

. نبين أن : $x+2y+2z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OCD):

نعلم أن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ متجهة منظمية على المستوى (OCD) .

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) تكتب على شكل : $x+2y+2z+d=0$.

وحيث أن O نقطة من المستوى (OCD) فإن : $0+2\times0+2\times0+d=0$ أي أن : $d=0$.

وبالتالي : $x+2y+2z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OCD).

2) لدينا : $M\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

إذن (S) هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$.

وبالتالي :مركز الفلكة هو منتصف القطعة $[AB]$ أي $\Omega\left(\frac{-2+6}{2};\frac{2+6}{2};\frac{8+0}{2}\right)$ أي $\Omega(2;4;4)$

وشعاع الفلكة هو $R=\frac{\sqrt{(6+2)^2+(6-2)^2+(-8)^2}}{2}=6$

3) أ. مسافة Ω عن المستوى (OCD) هي : $d(\Omega;(OCD))=\frac{|2+2\times4+2\times4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{18}{3}=6$

ب. بما أن $d(\Omega;(OCD))=6$ وشعاع الفلكة ياوس العدد 6

فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .

ج. نتحقق أن $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=0$:

لدينا : $\overrightarrow{OA}(-2,2,8)$

و $\overrightarrow{OB}(6;6;0)$

إذن : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=(-2)\times6+2\times6+8\times0=0$

استنتاج : لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=0$ إذن : $O\in(S)$

ولدينا : $O\in(OCD)$.

إذن : O نقطة مشتركة بين أن (S) و (OCD) .

وحيث أن للفلكة (S) و المستوى (OCD) نقطة مشتركة وحيدة لأن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .

ومنه O هي نقطة تماس (OCD) و (S) .

التمرين الثاني :

1)نكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين a و b :

معيار a هو $|a|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

لدينا : $a=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

معيار العدد B هو : 1

لدينا : $b=1\times\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=1\times\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

ومنه : $a=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ و $b==1\times\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

2.أ. نبين أن $z'=b\,z$

لدينا :

$$M'=R(M)\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}(z-z_O)+z_O$$
$$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)z$$
$$\Leftrightarrow z'=bz$$

ومنه $z'=b\,z$

لدينا :

$$bz_A=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)(2-2i)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i+1=z_C$$

ومنه :النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .

3)نبين ان : $\arg c\equiv\arg b+\arg a\ [2\pi]$

لدينا النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .إذن : $c=ba$

وبالتالي : $\arg c\equiv\arg b+\arg a\ [2\pi]$

. نحدد عمدة للعدد c :

لدينا : $\arg a\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ و $\arg b\equiv\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

إذن : $\arg c\equiv\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$

وبالتالي : $\arg c\equiv\frac{7\pi}{12}\ \ [2\pi]$

التمرين الثالث "

3B ; 4N ; 5R

1

ليكن Ω كون الإمكانيات .

السحب يتم تانيا .إذن كل سحبة عبارة عن تأليفة لثلاثة عناصر من بين 12

وبالتالي : $card\Omega = C_{12}^{3} = \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1} = 220$

بما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس فإن الإحتمال منتظم .(لدينا فرضية تساوي الإحتمال).

احتمال الحدث A: الحصول على 3 كرات من نفس اللون يعني سحب 3كرات بيضاء أو 3كرات سوداء أو 3 كرات حمراء .وبالتالي $card(A) = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$

ومنه : احتمال الحدث A هو : $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$

احتمال الحدث B: الحصول على 3 كرات مختلفة اللون مثنى مثنى يعني سحب كرة من كل لون .

وبالتالي $card(B) = C_5^1 . C_4^1 . C_3^1 = 60$

ومنه : احتمال الحدث A هو : $p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

ومنه : $p(A) = \frac{3}{44}$ و $p(B) = \frac{3}{11}$

2) أ. عندما نسحب 3 كرات تانيا من الكيس فإن عدد الألوان التي يمكن سحبها هو :1 او 2 أو 3 .

ومنه القيم الممكنة التي يمكن للمتغير العشوائي X أن يأخذها هي : 1 و 2 و 3 .

2.ب.

. حساب احتمال الحدث $(X=1)$:

الحدث $(X=1)$ هو الحصول على لون واحد أي أن للكرات الثلاث المسحوبة نفس اللون .

الحدث $(X=1)$ هو الحدث A (الوارد في السؤال 1)

إذن : $p(X=1) = p(A) = \frac{3}{44}$.

. حساب احتمال الحدث $(X=3)$:

الحدث : $(X=3)$ هو الحصول على 3 ألوان أي سحب كرة من كل لون

إذن الحدث $(X=3)$ هو الحدث B (الوارد في السؤال 1) .وبالتالي : $p(X=3) = p(B) = \frac{3}{11}$.

. حساب احتمال الحدث $(X=2)$:

الحدث $(X=2)$ هو الحصول على لونين مختلفين بالضبط .

ومنه : $card(X=2) = card\Omega - (cardA + cardB) = 145$ ..وبالتالي $p(X=2) = \frac{card(X=2)}{card\Omega} = \frac{145}{220} = \frac{1}{5}$

ومنه قانون احتمال X هو :

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{11}$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو : $E(X) = \left(1\times\frac{3}{44}\right) + \left(2\times\frac{1}{5}\right) + \left(3\times\frac{3}{11}\right) =$.

التمرين الرابع :

1.أ. توحيد المقام ..

ب.نبين أن : $I=1-3\ln 2$:

لدينا :

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=\int_{-2}^{-1}1-\frac{3}{x+3}dx=$$

$$=\int_{-2}^{-1}1dx-\int_{-2}^{-1}\frac{3}{x+3}dx=[x]_{-2}^{-1}-3\int_{-2}^{-1}\frac{(x+3)'}{x+3}dx=1-3\left[\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1}$$

$$=1-3(\ln 2-\ln 1)=1-3(\ln 2-0)$$

ومنه $I=1-3\ln 2$.

نبين أن : $J=-I$:

نضع : $\begin{cases}u(x)=\ln(2x+6)\\ v'(x)=1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}u'(x)=\dfrac{2}{2x+6}=\dfrac{1}{x+3}\\ v(x)=x\end{cases}$

وبالتالي : $J=[x\ln(2x+6)]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=-\ln 4+2\ln 2-\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=-I$ لأن $\ln 4=2\ln 2$

ومنه : $J=-I$

مسألة : $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

1.نتحقق أن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ لكل x من R

ليكن x من R ،

لدينا $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left[\left(\sqrt{e^x}\right)^2-2\sqrt{e^x}+1\right]+1=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$

ومنه $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ لكل x من R .

تكون الدالة f معرفة إذا كان : $x\in R$ و $e^x\geq 0$ و $e^x-2\sqrt{e^x}+2\succ 0$

وحيث أن $\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\succ 0$ و $e^x\succ 0$ لكل x من R

فإن : $e^x\geq 0$ و $e^x-2\sqrt{e^x}+2\succ 0$ لكل x من R

ومنه الدالة f معرفة على R .

. ليكن x من R ،

لدينا : $e^x-2\sqrt{e^x}+2\succ 0$

إذن : $\dfrac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}\succ 0$

وبالتالي : $1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\succ 0$ لكل x من R .

2) لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=+\infty$ $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$.

. نبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln 4$:

نعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\ln 2=\ln 4$.

هندسيا : المستقيم الذي معادلته $y=\ln 4$ مقارب مواز لمحور الأفاصيل جوار $(-\infty)$.

3.أ لكل x من R :

$$f'(x)=2\times\frac{2\times(\sqrt{e^x}-1)'(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}=2\frac{2\times\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}=\frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}$$

. لدينا : $f'(0)=\frac{2\sqrt{e^0}(\sqrt{e^0}-1)}{(\sqrt{e^0}-1)^2+1}=\frac{0}{2}=0$ لأن $e^0=1$.

ب.ندرس إشارة $\sqrt{e^x}-1$:

لدينا :

$$\sqrt{e^x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}=1 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

و

$$\sqrt{e^x}-1\succ 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}\succ 1 \Leftrightarrow e^x\succ 1 \Leftrightarrow x\succ 0$$

ومنه : جدول إشارة $\sqrt{e^x}-1$ هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{e^x}-1$	-	0	+

. استنتاج :

. ليكن x من R ،

لدينا : $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}$

وبما أن : $(\sqrt{e^x}-1)^2+1\succ 0$ و $2\sqrt{e^x}\succ 0$ فإن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x}-1$.

ومنه : f تزايدية على $[0;+\infty[$ وتناقصية على $]-\infty;0]$.

4)أ. ليكن x من R ،

لدينا : $f(x)=2\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right)=2\left[\ln e^x+\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right]=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

4) ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=0$.

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$.

5)أ. ليكن x من R ،

لدينا : $(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)=(\sqrt{e^x})^2-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2=e^x-3\sqrt{e^x}+2$

ومنه : $(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)=e^x-3\sqrt{e^x}+2$ لكل x من R .

5) ب . لدينا :

$\sqrt{e^x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}=2$

$\Leftrightarrow e^x=4$

$\Leftrightarrow x=\ln4$

و

$\sqrt{e^x}-2 \succ 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}\succ 2$

$\Leftrightarrow e^x \succ 4$

$\Leftrightarrow x\succ \ln4$

ومنه : جدول إشارة $\sqrt{e^x}-1$ هو :

x	$-\infty$		$\ln4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		-	0	+	

جدول إشارة $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ هو :

x	$-\infty$		0		$\ln4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-1$		-	0	+		+	
$\sqrt{e^x}-2$		-		-	0	+	
$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$		+	0	-	0	+	

5)ج. ليكن x من $[0;\ln4]$،

لدينا : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)\le 0$ إذن : $e^x-3\sqrt{e^x}+2\le 0$

وبالتالي : $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$ لكل x من $[0;\ln4]$.

5.د. ليكن x من $[0;\ln4]$،

لدينا : $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$

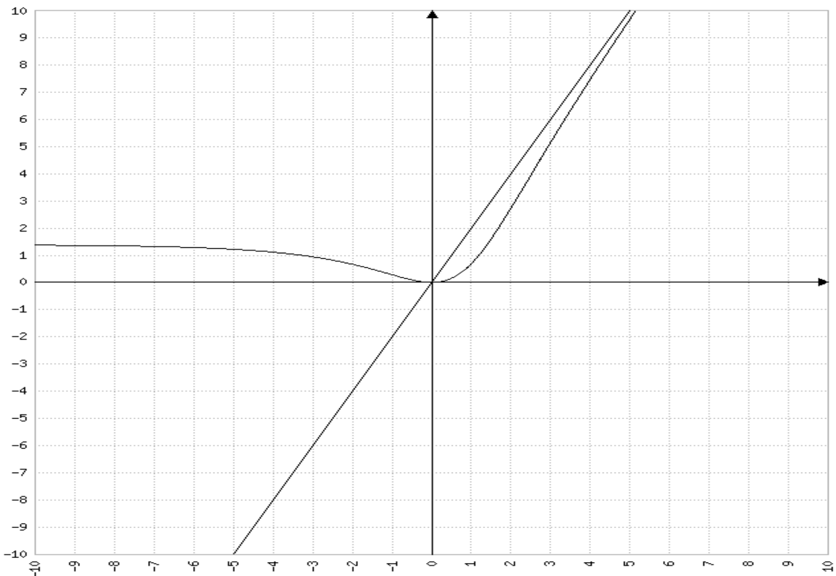
إذن : $\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\le\ln\sqrt{e^x}$ أي : $\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\le\ln\left(e^x\right)^{\frac{1}{2}}$

وبالتالي: $\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\le\frac{1}{2}\ln\left(e^x\right)$

ومنه : $2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\le\ln\left(e^x\right)$

وبالتالي $f(x)\le x$ لكل x من $[0;\ln4]$.

6.إنشاء منحنى f :



================= يونيو 2009 =================

II) نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من N .

1.نبين أن : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل n من N .

من أجل $n = 0$ لدينا : $1 \leq u_0 \leq \ln 4$ لأن $u_0 = 1$.

ليكن n من N .

نفترض أن $0 \leq u_n \leq \ln 4$ و لنبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$.

لدينا : $0 \leq u_n \leq \ln 4$

إذن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln 4)$ لأن f تزايدية قطعا على المجال $[0;\ln 4]$.

وبالتالي : $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$

$\boxed{\text{ومنه حسب مبدأالترجع : } 0 \leq u_n \leq \ln 4 \text{ لكل n من N .}}$

2.نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية :

ليكن n من N .

لدينا : $f(x) \leq x$ لكل x من $[0;\ln 4]$ و $0 \leq u_n \leq \ln 4$

إذن : $f(u_n) \leq u_n$ أي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من N .

$\boxed{\text{ومنه : المتتالية } (u_n) \text{ تناقصية}}$

3.نبين أن (u_n) متقاربة ونحدد نهايتها :

لدينا : (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0 .

إذن : (u_n) متقاربة .لتكن l نهايتها .

لدينا :

الدالة f متصلة على المجال $I = [0 ; \ln 4]$ و $f(I) \subset I$ ، $u_0 \in I$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من N و (u_n) متقاربة

إذن : l حل للمعادلة $f(x) = x$ في $I = [0;\ln 4]$

ليكن x من $I = [0;\ln 4]$

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = x \\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \frac{1}{2}x \\ &\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^{\frac{1}{2}x} \\ &\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \sqrt{e^x} \\ &\Leftrightarrow e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 1 \ ou \ \sqrt{e^x} = 2 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \ ou \ \sqrt{e^x} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ ou \ e^x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = \ln 4 \end{aligned}$$

وبما أن المتتالية (u_n) تناقصية فإن $l = 0$

$\boxed{\text{ومنه: المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة نحو العدد 1}}$