التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب لإلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين $A(0,-1,1)$ و $B(1,-1,0)$

والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$.

1. لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\sqrt{3}^2$.

إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$. ولدينا : $0^2+(-1)^2+1^2-2\times0-4\times1+2=0$ ، إذن $A\in(S)$.

2. لدينا : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ، ومنه فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

وبالتالي فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(1,1,1)$.

3. لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (OAB). إذن معادلة المستوى (OAB) تكتب على شكل $x+y+z+d=0$ ، وبما أن $O\in(OAB)$ ، فإن $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB).

لنحسب مسافة النقطة A عن المستوى (OAB) : $d\left(\Omega,(OAB)\right)=\dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$.

وعليه فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A على اعتبار أن $A\in(S)$ و $A\in(OAB)$.

التمرين الثاني :

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$. مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=(-3)^2-1\times34=9-34=-25=(5i)^2$.

وبالتالي فإن للمعادلة السابقة حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{-(-3)+5i}{1}=\boxed{3+5i} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{-(-3)-5i}{1}=\boxed{3-5i}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{3-5i \quad , \quad 3+5i\}$.

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=3+5i$ و $b=3-5i$ و $c=7+3i$. لتكن النقطة $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالازاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$.

أ- لدينا : $M'=T(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow z'=z+aff(\vec{u})\Leftrightarrow\boxed{z'=z+4-2i}$

وبما أن : $a+4-2i=3+5i+4-2i=7+3i=c$ ، فإن: $C=T(A)$ أي C هي صورة A بالازاحة T .

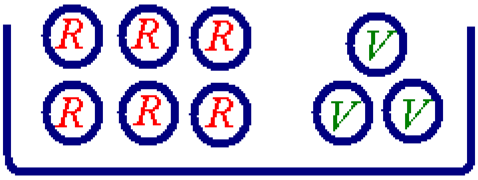
ب- لدينا : $\dfrac{b-c}{a-c}=\dfrac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i}=\dfrac{-4-8i}{-4+2i}=\dfrac{2i(-4+2i)}{-4+2i}=\boxed{2i}$.

جـ- لدينا : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i=\left[2,\dfrac{\pi}{2}\right]$. إذن :

$$\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

ومنه فإن ABC مثلث قائم الزاوية في C ولدينا : $\dfrac{CB}{CA}=\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|=2$. إذن : $\boxed{BC=2AC}$.



التمرين الثالـــــــث :

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1. نسحب عشوائيا وفي **أن واحـــــــد** (التريتيب غير مهم) ثلاث كرات من الصندوق. تثبيت الصنف : **التأليفـــــات** : C_n^p .

أ- احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء RRV هو : $\dfrac{C_6^2 \times C_3^1}{C_9^3} = \dfrac{15 \times 3}{84} = \boxed{\dfrac{15}{28}}$.

ب- طريقة 1 : احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل RRV أو RVV أو VVV هو :

$$\frac{C_6^2 C_3^1 + C_6^1 C_3^2 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{15 \times 3 + 6 \times 3 + 1}{84} = \boxed{\frac{16}{21}}.$$

طريقة 2 : نضع الحدث A: « الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل » .

الحدث المضاد للحدث A هو : $\overline{A}$: « الحصول على ثلاث كرات حمراء - RRR - ».

لدينا : $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_6^3}{C_9^3} = 1 - \dfrac{20}{84} = \dfrac{64}{84} = \boxed{\dfrac{16}{21}}$.

2. نسحب عشوائيا **بالتتابـــــــع وبدون إحـــلال** (الترتيب مهم والتكرار غير وارد) ثلاث كرات من الصندوق.

تثبيت الصنف : **الترتيبـــــات بـــــدون تكـــــرار** : A_n^p .

احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو : $\dfrac{A_6^3}{A_9^3} = \dfrac{120}{504} = \boxed{\dfrac{5}{21}}$.

التمرين الرابـــــع :

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x - 2\ln x$.

1. أ- ليكن $x \in]0,+\infty[$ ، لدينا : $g'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - \dfrac{2}{x} = \boxed{\dfrac{x-2}{x}}$.

ب- نعلم أن : $g'(x) = \dfrac{x-2}{x} \quad : \quad \forall x \in]0,+\infty[$. إذن إشارة $g'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ هي إشارة $x-2$.

ولدينا : $x \in]0,2] \Rightarrow x \le 2 \Rightarrow x - 2 \le 0$ و $x \in [2,+\infty[\Rightarrow x \ge 2 \Rightarrow x - 2 \ge 0$. إذن :

g تناقصية على المجال $]0,2]$ وتزايدية على المجال $[2,+\infty[$. خلاصة :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(2) = 2(1-\ln 2)$	$\nearrow$	

.2 بما أن : $e>2 \Rightarrow 1>\ln 2 \Rightarrow 1-\ln 2>0$ ، فإن : $g(2)=2(1-\ln 2)>0$.

ولدينا : $g(2)=2(1-\ln 2)$ قيمة دنوية مطلقة للدالة g على المجال $]0,+\infty[$ عند العدد 2 . ومنه فإن:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad g(x) \geq g(2)>0$$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$.

.1 لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$.

المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=0}$.

.2 أ- نضع : $t=\sqrt{x}$. إذن : $x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. وحيث أن $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t}=0$ ، فإن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln(t^2)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{1}$.

جـ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x-(\ln x)^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty} -(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$ ، وحسب السؤال السابق ، فإن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

د- لدينا : $f(x)-x=-(\ln x)^2 \leq 0 \quad : \quad \forall x \in]0,+\infty[$. إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ).

.3 أ- ليكن $x \in]0,+\infty[$ ، لدينا : $f'(x)=\left(x-(\ln x)^2\right)'=1-2\ln'(x)\ln x=1-\frac{2\ln x}{x}=\frac{x-2\ln x}{x}=\boxed{\frac{g(x)}{x}}$.

وحسب إشارة $g(x)$ في الجزء الأول ، لدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\quad : \quad f'(x)>0$. إذن f تزايدية على $]0,+\infty[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

جـ- معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow \boxed{y=x}$.

.4 لدينا : f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. إذن: f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال J حيث :

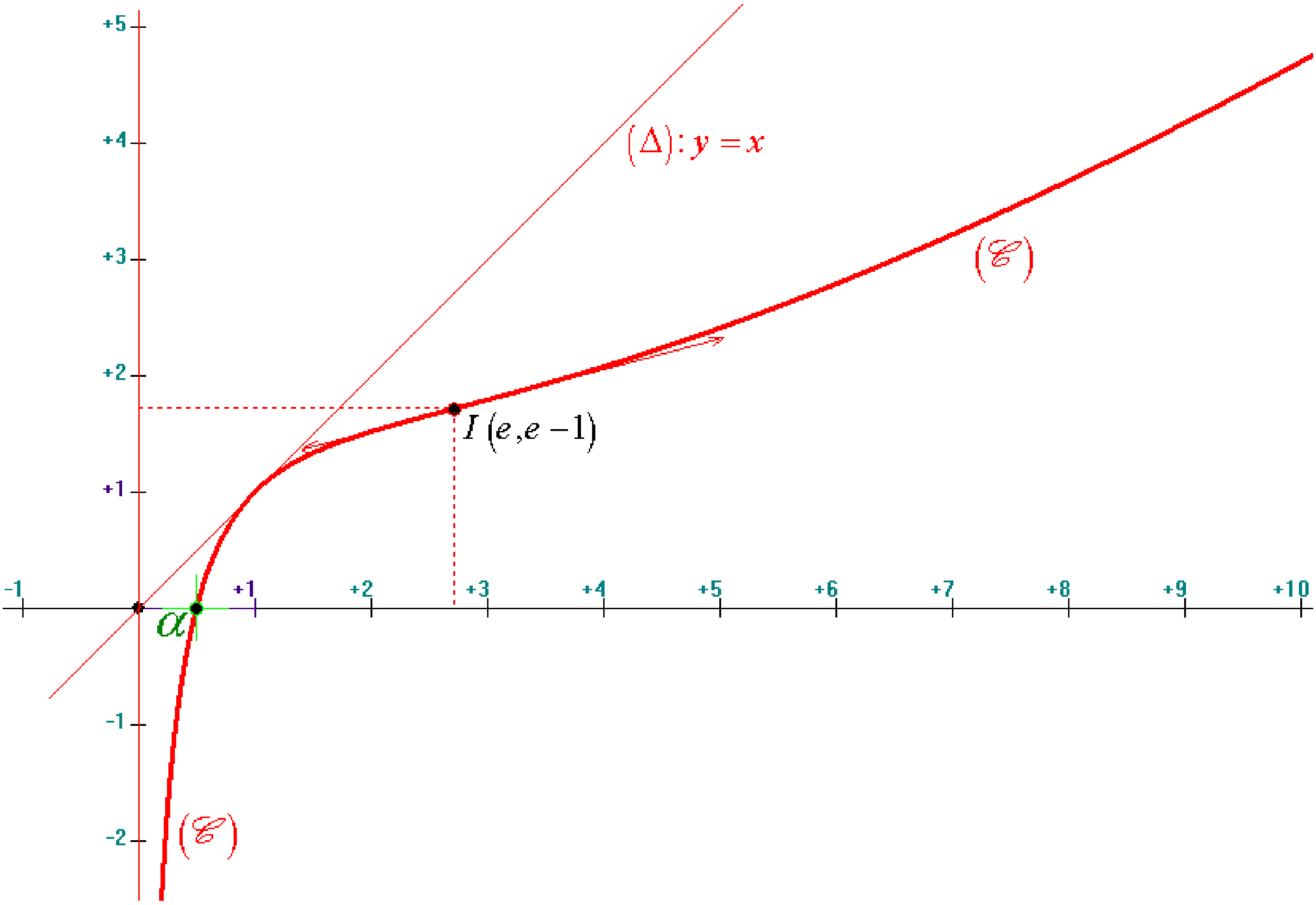
$J=f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left]-\infty,+\infty\right[=\mathbb{R}$ نحو المجال $I=\left]0,+\infty\right[$ ، وبما أن $0\in J$ ، فإن

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I=\left]0,+\infty\right[$.

وبما أن : $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}<0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-(\ln 2)^2>0$ (لأنه حسب المعطيات $(\ln 2)^2<\frac{1}{2}$).

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، لدينا : $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

5. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$: $\alpha\approx 0,4948664145$. $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$. $e\approx 2,7$.



6. أ- لدينا : $H'(x)=(x\ln x-x)'=x'\ln x+x\ln' x-1=\ln x$: $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$. إذن : $H:x\mapsto x\ln x-x$

هي دالة أصلية للدالة $\ln:x\mapsto\ln x$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، ولدينا :

$$\int_1^e\ln(x)dx=\left[H(x)\right]_1^e=H(e)-H(1)=0-(-1)=\boxed{1}$$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء، لدينا :

$$\int_1^e\ln(x)^2dx=\int_1^e H'(x)\ln(x)dx=\left[H(x)\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e H(x)\ln'(x)dx$$

$$=H(e)\ln(e)-H(1)\ln(1)-\int_1^e\frac{x\ln x-x}{x}dx$$

$$=-\int_1^e(\ln(x)-1)dx=-\int_1^e\ln(x)dx+(e-1)=\boxed{e-2}$$

- حسب السؤال أعلاه -

جـ- مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\mathscr{A}=\int_1^e |f(x)-x|dx=\int_1^e (x-f(x))dx=\int_1^e (\ln x)^2 dx=\boxed{e-2}\approx 0,7(u.a.)$$

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1. لنبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \; : \; 1\le u_n\le 2$.
   - ✓ من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=2$ ، إذن : $1\le u_0\le 2$.
   - ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$.
     - نفترض أن : $1\le u_n\le 2$.
     - لنبين أن : $1\le u_{n+1}\le 2$:

نعلم أن f تزايدية على المجال $]0,+\infty[$. إذن : $1\le u_n\le 2\Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(2)\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le 2$

لأن : $f(2)-2=-(\ln 2)^2\le 0\Rightarrow f(2)\le 2$.

   - ✓ وبالتالي فإن : $\forall n\in\mathbb{N} \; : \; 1\le u_n\le 2$.

2. ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=-(\ln(u_n))^2\le 0$. إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.

3. بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة. ولدينا :
   - ✓ f دالة متصلة على المجال $[1,2]$.
   - ✓ f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,2]$. إذن : $f([1,2])=[f(1),f(2)]\subset[1,2]$ ، لأن : $f(2)\le 2$.
   - ✓ $u_0=2\in[1,2]$.
   - ✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l .

حسب مصاديق التقارب ، لدينا : $f(l)=l$ و $l\in[1,2]$.

ولدينا : $f(l)=l\Leftrightarrow l-(\ln(l))^2=l\Leftrightarrow \ln(l)=0\Leftrightarrow l=1$. وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=1}$.

انتهـــــــــــى

مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$ باستعمال Maple 7

```
> f:=x->x-(ln(x))^2;
```

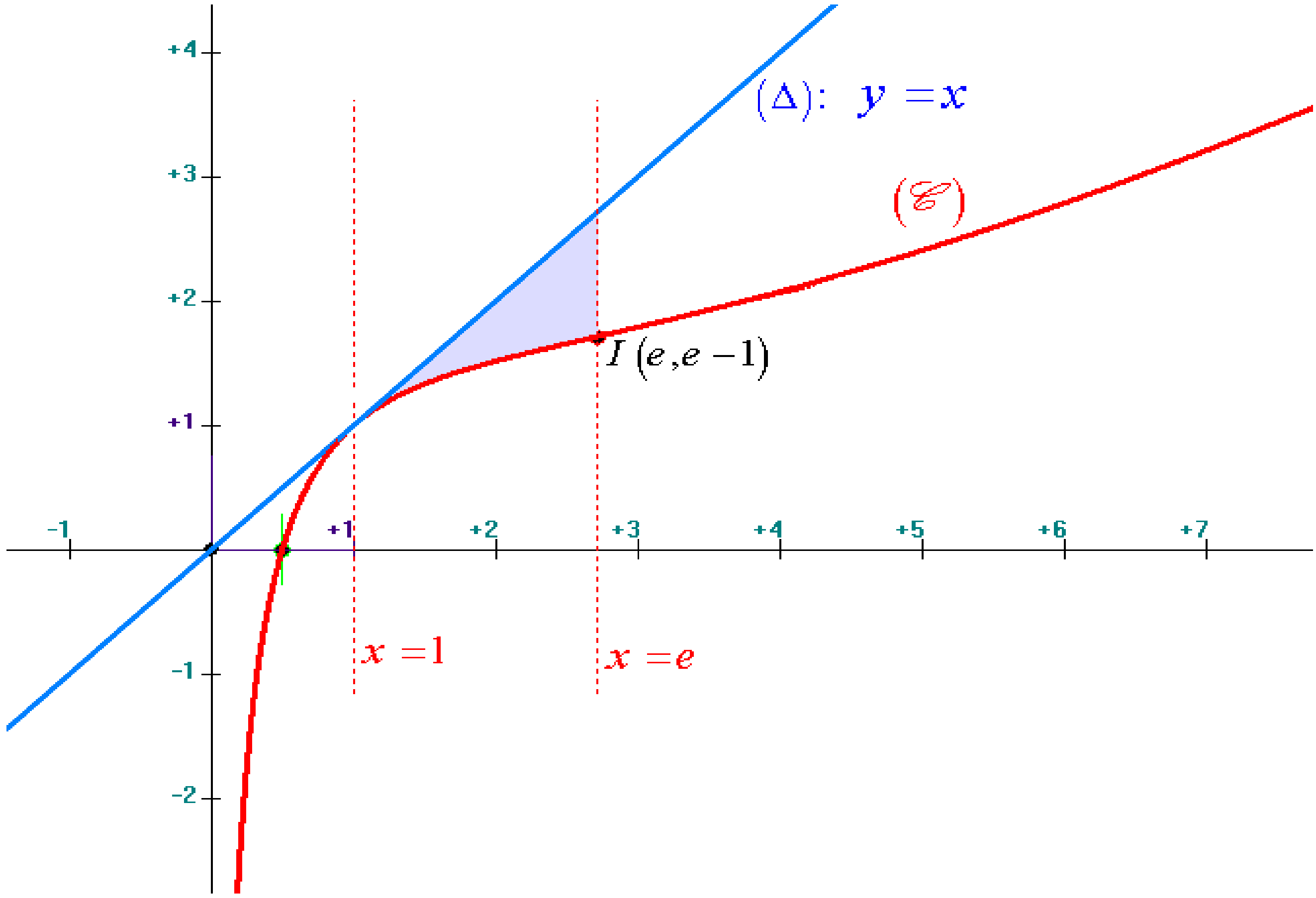
$$f:=x\to x-\ln(x)^2$$

```
> A:=Int(abs('f'(x)-x),x=1..exp(1))=int(abs(f(x)-x),x=1..exp(1));
```

$$A:=\int_1^e |-\mathrm{f}(x)+x|\,dx=\mathrm{e}-2$$

```
> A:=evalf(rhs(A),20);
```

$$A:=.71828182845904523554$$



تمثيل الحدود الستة الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على محور الأفاصيل باستعمال Archimède II :