التمرين الأول

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{2+U_n} \end{cases}$

1- بين أن $U_n > 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2- أ- بين أن $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n(2-U_n)}{U_n+2}$ و أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

ب- استنتج أنها متقاربة

3- نضع $V_n = 1 - \dfrac{2}{U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \dfrac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ج- نضع $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{2}{U_k}$ بين أن $S_n = n - 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (لاحظ أن $V_k = 1 - \dfrac{2}{U_k}$)

4- أ- بين أن $|U_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - 2|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين بالترجع أن $|U_n - 2| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ثم استنتج مرة أخرى النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثاني

(I) 1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - 4Z + 8 = 0$

2) نضع $a = 2 - 2i$ و $b = 2 + 2i$

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد b

ب- بين أن $b^{2014} - a^{2014} = -2^{3022}\, i$

(II) نعتبر في المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقطتين B ، Ω لحقاهما على التوالي $Z_B = 2+2i$ ، $w = i$

و ليكن R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{3\pi}{2}$ و نضع $A = R(B)$

1) أ- حدد التمثيل العقدي للدوران R

ب- استنتج أن لحق النقطة A هو العدد $Z_A = 1 - i$

2) أ- أحسب العدد $\dfrac{Z_B}{Z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB

ب- استنتج أن النقط O ، A ، B و Ω متداورة

3) حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالازاحة T متجهتها $\vec{v}$

التمرين الثالث

الفضاء (ξ) المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

و المستوى (P) الذي معادلته $x-y-z+1=0$

1) بين أن مركز (S) هو النقطة $\Omega(1,2,3)$ و شعاعها يساوي $\sqrt{6}$

2) أعط معادلة للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في النقطة $A(0,3,1)$

3) أ- حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (P)

ب- أحسب المسافة $d = d(\Omega,(P))$

استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) في دائرة (C)

ج- حدد إحداثيات المركز Ω' و قيمة الشعاع R' بدائرة (C)

4) أ- أدرس تقاطع الفلكة (S) و المستقيم $(D)\begin{cases} x = -1+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

ب- ماذا تستنتج ؟