التمرين الأول :

I) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 12 - 16$

$\Delta = -4$

$\Delta = (2i)^2$

$z_1 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2}$ أو $z_2 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2}$

$z_1 = \sqrt{3}+i$ أو $z_2 = \sqrt{3}-i$

$S = \{\sqrt{3}+i \,;\, \sqrt{3}-i\}.$

II)

1) $z_B = \sqrt{3}+i$

$z_B = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$z_B = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$

و $z_D = \sqrt{3} - i.$

$z_D = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$

$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$\left(\frac{b}{d}\right) = \frac{[2, \frac{\pi}{6}]}{[2; -\frac{\pi}{6}]} = [1; \frac{\pi}{3}].$

$\arg\left(\frac{b-0}{d-0}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$

$(\overrightarrow{OB}\,\hat{}\,, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

إذن OBD مثلث متساوي الأضلاع

2) $A(z_A)$ صورة $E(z_E)$ بالدوران E :

تعني $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_E$

حيث $z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_A = i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z_A = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$ $\quad z_E = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

A منتصف [OB] $\Leftrightarrow$ $z_A = \frac{z_B + z_O}{2}$

$\frac{z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = z_A$

إذن A منتصف [OB].

3) أ-

$C(z_C)$ صورة $E(z_E)$ بالإزاحة T : $2\vec{v} = 2i$

تعني $z_C = z_E + 2i$

$z_C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 2i$

$z_C = \frac{1}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ب-

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{1}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

$$= \frac{1 + i(4-\sqrt{3}) - \sqrt{3} - i}{2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{3}) + i(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{[(1-\sqrt{3}) + i(3-\sqrt{3})][\sqrt{3}-i]}{4}$$

$$= \frac{-4i + 4i\sqrt{3}}{4}$$

$$= (\sqrt{3}-1)i$$

نبين أن (CD) واسط [OB] .

لدينا OBD مثلث متساوي الأضلاع

و A منتصف [OB]

إذن $(AD) \perp (AB)$

و لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ إذن :

$$\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

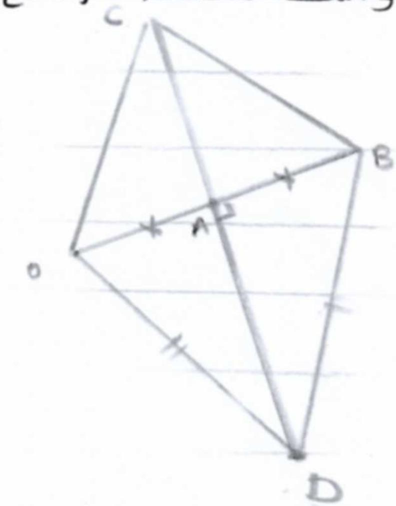
وعليه $(AC) \perp (AB)$

إذن ABC قائم الزاوية في A .

وبالتالي A تنتمي إلى المستقيم (CD)

و A منتصف [OB]

إذن (CD) واسط القطعة [OB] .



التمرين الثاني:

الجزء الأول:

1-

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x > 0\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$

$D_g =]-\infty, 1[$

2-

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x - \ln(1-x)$$
$$= -\infty$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} x - \ln(1-x)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$$

3- حساب المشتقة $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 - \frac{(1-x)'}{1-x}$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$g'(x) = \frac{2-x}{1-x} = \frac{x-2}{x-1}$$

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

لدينا على المجال $]-\infty, 0[$: $g(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$

إذن $\forall x \in]-\infty, 0[\quad g(x) < 0$

وعلى المجال $]0, 1[$ $\quad g(]0,1[) =]0; +\infty[$

إذن $\forall x \in]0, 1[\quad g(x) > 0$

الجزء 2:

$$f(x) = x + \ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$$

1- أ-

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x}^2}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= 0$$

ب-

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$$

نضع $X = 1-x$

$$x \to -\infty \iff X \to +\infty$$

$$= \lim_{X\to+\infty} 1 - X + \ln(X) - \frac{1}{2}\left(\ln(X)\right)^2$$

$$= \lim_{X\to+\infty} X\left(\frac{1}{X} - 1 + \frac{\ln(X)}{X} - \frac{1}{2}\frac{(\ln(X))^2}{X}\right]$$

$$= -\infty$$

لأن $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$; $\lim_{X\to+\infty} \frac{(\ln(X))^2}{X} = 0$

ب-

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x)\left(1 - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right)$$

$$-\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{2}\ln(1-x) = -\infty$$

$\Leftarrow$ C_f يقبل فرعا شلجميا باتجاه المستقيم $y=x$ بجوار $-\infty$

ج-

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x + \ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$$

$$= -\infty$$

لأن $\lim_{x\to1^-} \ln(1-x) = -\infty$

x	$-\infty$	1
$\ln(1-x)$	$+$	

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1

وبالتالي C_f يقبل مقاربا رأسيا $x = 1$.

3- حساب المشتقة:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\times 2 \times \frac{1}{1-x}\times\ln(1-x)$$

$$= \frac{1-x-1+\ln(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{x-\ln(1-x)}{x-1}$$

$$= \frac{g(x)}{x-1}$$

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4- الوضع النسبي ل C_f و $y = x$

$$f(x) - y = \ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$$

لنحل المعادلة $\ln(1-x) - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2 = 0$

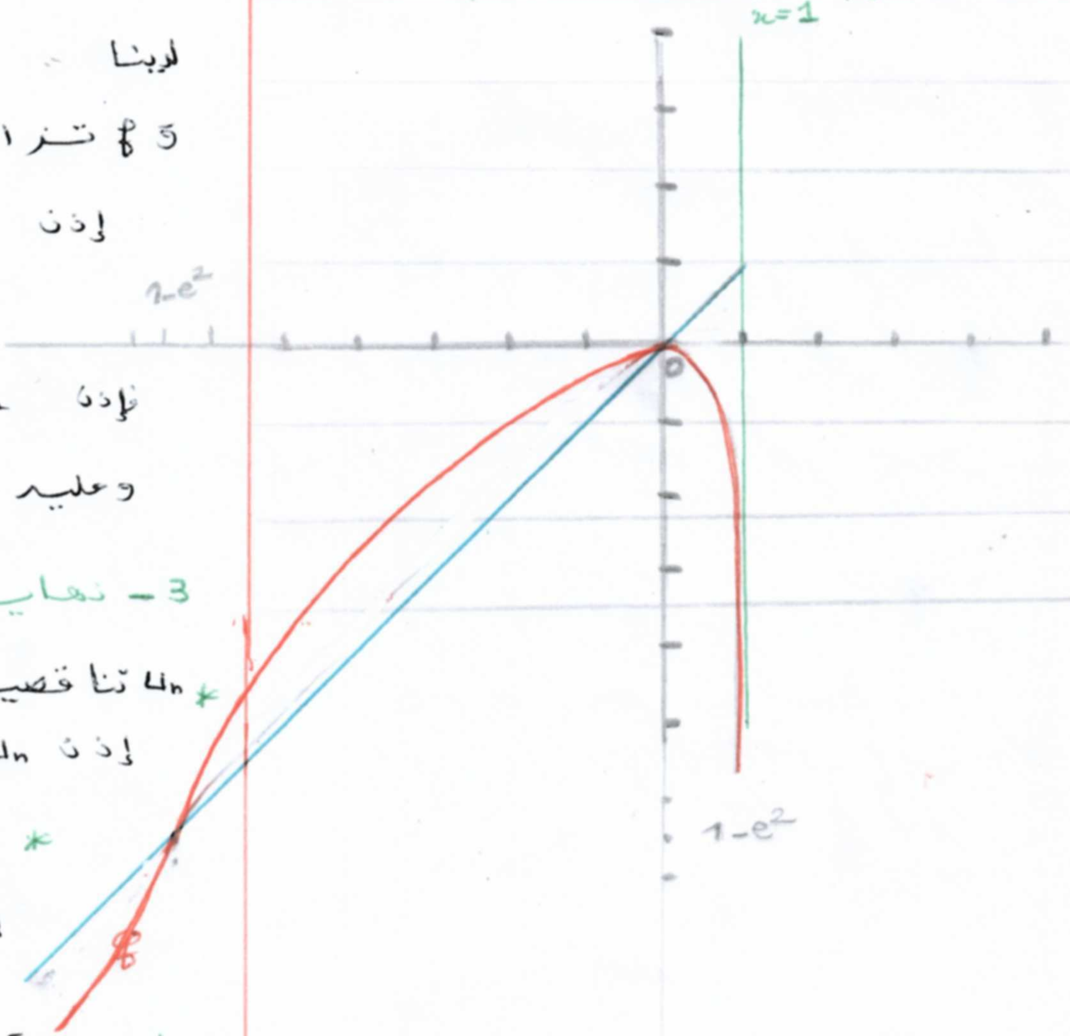
$$\ln(1-x)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)\right) = 0$$

$\ln(1-x) = 0$ أو $1 - \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right) = 0$

$\ln(1-x) = \ln(1)$ أو $\ln(1-x) = 2$

$x = 0$ أو $x = -e^2 + 1$

x	$-\infty$		$1-e^2$		0		1
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي لـ $\mathscr{C}_f$ و $y=x$		$\mathscr{C}_f$ تحت $y=x$	$(1-e^2, 1-e^2)$	$\mathscr{C}_f$ فوق $y=x$	$(0,0)$	$\mathscr{C}_f$ تحت $y=x$	



الجزء 03 :

1- نبين أن $1-e^2 < u_n < 0$:

من أجل $n=0$ ‏ $1-e^2 < u_0 = -1 < 0$ (v)

نفترض أن $1-e^2 < u_n < 0$

ونبين أن $1-e^2 < u_{n+1} < 0$

لدينا $1-e^2 < u_n < 0.$

و f دالة تزايدية على $]1-e^2, 0[\subset]-\infty, 0[$

إذن $f(1-e^2) < f(u_n) < f(0)$

$1-e^2 < u_{n+1} < 0$

② رتابة المتتالية u_n .

$u_0 = -1$ و $u_1 = -0,54$

$u_0 > u_1$

نفترض أن $u_n > u_{n+1}$

ونبين أن $u_{n+1} > u_{n+2}$

لدينا $u_n > u_{n+1}$

و f تزايدية على $]-\infty, 0[$

إذن $f(u_n) > f(u_{n+1})$

$u_{n+1} > u_{n+2}$

فإذن $u_n > u_{n+1}$ ‏ $\forall n \in \mathbb{N}$

وعليه فإن u_n تناقصية.

3- نهاية u_n :

* u_n تناقصية ومحصورة بـ $1-e^2$

إذن u_n متقاربة

* $x \mapsto \ln(1-x)$ متصلة على $]1-e^2; 0[$

إذن f متصلة على $]1-e^2, 0[$

* $f(]1-e^2, 0[) =]1-e^2, 0[$

$f(]1-e^2, 0[) \subset]1-e^2, 0[$

نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x$

حسب المنحنى : $x = 1-e^2$; $x = 0$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

انجاز : جبوج طالحة