تصحيح الفرض رقم 02

التمرين الأول:

① تحديد D_f:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq 0 , \sqrt{x}+1 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

$$D_f = [0 ; +\infty[$$

* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

② قابلية الاشتقاق على يمين 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x - 2 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x - 4 + \frac{4}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{4}{x(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - 4\frac{\sqrt{x}+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = 0^+$ $\quad \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) > 0$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = -\infty$

إذن

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = -\infty$$

وعليه فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0. إذن C_f يقبل نصف مماس رأسي موجه نحو الأسفل.

③ المشتقة $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)' - 2' + \left(\frac{4}{\sqrt{x}+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4'(\sqrt{x}+1) - 4(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{-4}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+1)-4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x+1)-(x+1)+3(x-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)+3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+1+3(\sqrt{x}+1))}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+3\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

- من إنجاز التلميذة
صالحة جبوج ~

* جدول التغيرات:

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\sqrt{x}-1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow +\infty$

التمرين الثاني:

① نبين أن $0 < U_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل $n=0$: $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$ (V)

نفترض أن $0 < U_n < 1$

ونبين أن $0 < U_{n+1} < 1$

لدينا $U_{n+1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2U_n+1}\right)$

و

$$0 < U_n < 1 \Rightarrow 1 < 2U_n+1 < 3$$
$$\Rightarrow -1 < \frac{-1}{2U_n+1} < -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{2U_n+1} < \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2U_n+1}\right) < 1$$
$$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$$

وعليه $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < U_n < 1$

② رتابة U_n:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{2U_n+1} - U_n = \frac{2U_n(1-U_n)}{2U_n+1}$$

$0 < 1 - U_n < 1$ و $2U_n + 1 > 0$

$$0 < 2U_n(1-U_n) < 2$$

إذن $U_{n+1} > U_n$

وعليه U_n متتالية تزايدية.

③ نبين أن V_n هندسية:

$$V_{n+1} = 1 - \frac{1}{U_{n+1}} \Leftrightarrow V_{n+1} = 1 - \frac{1+2U_n}{3U_n}$$
$$= \frac{U_n - 1}{3U_n}$$
$$= \frac{U_n}{3U_n} - \frac{1}{3U_n}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3U_n}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{U_n}\right)$$
$$= \frac{1}{3} V_n$$

وعليه V_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

$$V_0 = 1 - \frac{1}{U_0} = -1$$

ب) $V_n = 1 - \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow V_n - 1 = -\frac{1}{U_n}$

$$\frac{1}{V_n - 1} = -U_n$$
$$U_n = \frac{1}{1 - V_n}$$

و

$$V_n = V_0 q^n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$U_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$
$$U_n = \frac{1}{\frac{3^n+1}{3^n}}$$
$$U_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$

نهاية U_n:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{3^n+1}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}$$
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ و $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

بإشراف الأستاذ:

الماتني بوشعيب