



.01

.01 أحسب النهاية التالية :

أ- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = 1$ لأن $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ مع $u = \sin x$ حيث $x \rightarrow 0$
 ب - لدينا :
 فإن $u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cos x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cos x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cos x \sin x} = \frac{3}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = 1$

.02 أحسب النهاية التالية بدون استعمال المرافق : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$: استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2}$

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ (الطريقة 1)

لدينا : $\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \frac{\sqrt[12]{x^4} - 1}{\sqrt[12]{x^3} - 1}$ و منه نضع : $t = \sqrt[12]{x}$ و بالتالي : $x \rightarrow 1$ فإن $t \rightarrow 1$
 و منه :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[12]{x^4} - 1}{\sqrt[12]{x^3} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^3 + t^2 + t + 1)}{(t-1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 + t + 1}{t^2 + t + 1} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



خلاصة: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \frac{4}{3}$

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ (الطريقة 2)

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

نحسب :

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{3}$; $\left[f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} ; f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \right]$

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = 4$ إذن : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{1}{4}$; $\left[g(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} ; g'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \right]$

• **ومنه:** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$

خلاصة: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \frac{4}{3}$

• استنتج النهاية التالية : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2}$$

لدينا :

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{9}$$

خلاصة: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2} = \frac{16}{9}$



03. أحسب النهاية التالية بدون استعمال المرافق : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1}$

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1}$ (الطريقة 1)

لدينا : $\frac{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1} = \frac{\sqrt[12]{\frac{x+1}{x}} - 1}{\sqrt[12]{\frac{x+1}{x}} - 1}$ و منه نضع : $t = \sqrt[12]{\frac{x+1}{x}}$ و بالتالي : $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow 1$:
ومنه :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[12]{\frac{x+1}{x}} - 1}{\sqrt[12]{\frac{x+1}{x}} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^4 - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)(t^3 + t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + t + 1}{t^3 + t^2 + t + 1} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1} = \frac{3}{4}$

ملحوظة : يمكنك استعمال الطريقة 2

02.

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

01. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .



لدينا :

$$\begin{aligned}x \in D_f &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 > 0 \quad (\text{و هذا دائما صحيح})\end{aligned}$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f = \mathbb{R}$.

02. أحسب نهايتي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم أعط تؤول هندسي للنتيجتين المحصل عليهما .

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = 0 \quad (\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = +\infty)$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ التؤول الهندسي : أن المنحى الممثل للدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم الذي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$.

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = 0 \quad (\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = +\infty)$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ التؤول الهندسي : أن المنحى الممثل للدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم الذي معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$.

03. أدرس اتصال الدالة f على D_f .

لدينا الدالة : $x \mapsto x^2 + 2x + 2$ متصلة و موجبة قطعاً على \mathbb{R} و بالتالي الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ متصلة و لا تنعدم على \mathbb{R} و منه مقلوبها متصلة على \mathbb{R} .

خلاصة : الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ متصلة على \mathbb{R} .

04. أحسب f' على D_f ثم ضع جدول لتغيرات الدالة f .

• نحسب f' على D_f

لدينا :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \right]' \\ &= - \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} \right)' \times \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} \right)^2} \\ &= - \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} \right)^2}\end{aligned}$$



$$= -\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} \times \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$= -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \times \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \times \frac{1}{(x+1)^2+1} \quad \text{ومنه :}$$

• نضع جدول لتغيرات الدالة f .
لدينا إشارة f' هي إشارة -x-1 . ومنه جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)		0	
		+	-
f(x)		1	
		↗	↘
	0		0

05. لنعتبر g قصور الدالة f على المجال $I = [-1, +\infty[$.

نبين أن : g تقابل من $[-1, +\infty[$ إلى J يتم تحده .

حسب ما سبق الدالة f متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $I = [-1, +\infty[$ إذن قصورها g على المجال $I = [-1, +\infty[$ متصلة و تناقصية

قطعاً على المجال $I = [-1, +\infty[$.

ومنه : الدالة g تقابل من $I = [-1, +\infty[$ إلى $J =]0; 1]$ $J = f([[-1, +\infty[) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(-1) =]0; 1]$

خلاصة : g تقابل من $I = [-1, +\infty[$ إلى $J =]0; 1]$.

06. نحدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة g

تعتبر : $x \in I = [-1, +\infty[$ و $y \in J =]0; 1]$ مع $f(x) = y$ و $f^{-1}(y) = x$.

ومنه :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2x+2} = y^2 \quad ; (y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2+1} = y^2$$

$$\Leftrightarrow 1 = y^2((x+1)^2+1)$$

$$\Leftrightarrow y^2(x+1)^2 = y^2 - 1$$



$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{y^2-1}{y^2} \quad \left(\frac{y^2-1}{y^2} > 0; y \geq 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} \quad \text{أو} \quad x+1 = -\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$

$$(x \in [-1, +\infty[\Rightarrow x+1 \in [0; +\infty[) \text{ (غير مقبول) } \quad x+1 = -\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$

$$(x \in [-1, +\infty[\Rightarrow x+1 \in [0; +\infty[) \text{ (مقبول) } \quad x+1 = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$

$$\text{ومنه : } f^{-1}(y) = x = -1 + \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} \quad \text{و بالتالي : } f^{-1}(y) = x = -1 + \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$

$$f^{-1} : J =]0;1] \rightarrow I = [-1, +\infty[$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$$

خلاصة : الدالة العكسية هي معرفة كما يلي :

03

تذكير :

✓ $a < x < b$ يسمى تأطيرا للعدد x سعته (أو طوله) $b-a$.

✓ العدد $\frac{a+b}{2}$ (منتصف أو مركز المجال) هو قيمة مقربة ل x إلى الدقة $\frac{b-a}{2}$. (أي السعة مقسومة على 2)

طريقة التفرع الثنائي LA Dichotomie :

• f دالة عددية متصلة على $[a; b]$ حيث $f(a)f(b) < 0$ مع α عدد وحيد من $]a; b[$ يحقق $f(\alpha) = 0$. (مع العلم أن $\frac{a+b}{2}$ مركز $[a; b]$)

• لتحديد تأطيرا أدق ل α نحسب : $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

• نتبع ما يلي :

❖ إذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ فإن $\alpha = \frac{a+b}{2}$.

❖ إذا كان $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ فإن $\alpha \in \left]a; \frac{a+b}{2}\right[$. و هو تأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ و عند إعادة هذه الطريقة على المجال $\left]a; \frac{a+b}{2}\right[$

نحصل على تأطير أدق للعدد α .

❖ إذا كان $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b) < 0$ فإن $\alpha \in \left]\frac{a+b}{2}; b\right[$. و هو تأطير سعته $\frac{b-a}{2}$ و عند إعادة هذه الطريقة على المجال $\left]\frac{a+b}{2}; b\right[$

نحصل على تأطير أدق للعدد α .

وهي تسمى : طريقة التفرع الثنائي LA Dichotomie :



رقم

سنة 2015 - 2016

تصحيح : الفرض منزلي



الصفحة

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ

تمرين تطبيقي :

لتعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x) = x^3 + x - 1$.

01. نبين أن المعادلة : $f(x) = 0$: $x \in [a; b]$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0; 1[$.

لدينا :

- الدالة $f(x) = x^3 + x - 1$ متصلة على \mathbb{R} إذن هي متصلة على $[0; 1]$ ولدينا : $f(0) \times f(1) = (-1) \times 1 < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد على الأقل α من $]0; 1[$ حيث $f(\alpha) = 0$ أي $\alpha^3 + \alpha - 1 = 0$
- $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ إذن الدالة f تزايدية قطعاً على \mathbb{R} إذن هي تزايدية قطعاً على $[0; 1]$ ومنه : يوجد عدد وحيد α حيث : $f(\alpha) = 0$ (حسب مبرهنة التقابل *theorème des bijections*)
- ومنه : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α من $]0; 1[$.

خلاصة : المعادلة : $f(x) = 0$: $x \in [a; b]$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0; 1[$.

02. أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم استنتج تأطير α سعته $\frac{1}{2}$.

- نحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$: لدينا : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8}$. إذن : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$
- نستنتج تأطير α سعته $\frac{1}{2}$. لدينا : $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) = \left(-\frac{3}{8}\right) \times 1 < 0$ ومنه $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

خلاصة : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ و هو تأطير α سعته : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

03. حدد قيمة مقربة ل α إلى الدقة $\frac{1}{8}$.

بما أن : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ نبحث عن تأطير أدق ل α وذلك باستعمال طريقة التفرع الثاني مع : $a = \frac{1}{2} < \alpha < 1 = b$

• نبحث عن الإشارة السالبة من بين : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b)$ و $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

مع $f(b) = f(1) = 1$ و $f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$ و $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64}$

لدينا :

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b) = \frac{11}{64} \times 1 = \frac{11}{64} > 0$ (إذن) $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ لا نأخذ هذا التأطير .
- $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\frac{3}{8} \times \frac{11}{64} < 0$ (إذن) $\left[a; \frac{a+b}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ نأخذ هذا التأطير .



الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ



الصفحة

رقم

لسنة 2015 - 2016

تصحيح : الفرض منزلي

- هذا التأطير سعته : $\frac{a+b}{2} - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

- قيمة مقربة ل α : هو العدد $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$ إلى الدقة $\frac{a+b}{2} - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

خلاصة : قيمة مقربة ل α : هو العدد $\frac{5}{8}$ إلى الدقة $\frac{1}{8}$