تصحيح الفرض رقم 1

التمرين 01 " احسب النهايات التالية

① لدينا $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 1}$

ومنه $= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -\frac{5}{3}$

وعليه $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 1} = \frac{-5}{3}$

② لدينا $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1 - 2\sqrt{x-1}}{x - 1}$

ومنه $= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} - \frac{2\sqrt{x-1}}{(x-1)}$

وعليه $= \lim_{x \to 1^+} (x+1) - \frac{2(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x-1})}$

نعلم أن $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{x-1} = 0^+$

ومنه $\lim_{x \to 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty$

ولدينا أيضا $\lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$

إذن $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1 - 2\sqrt{x-1}}{(x-1)} = -\infty$

③ لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x+1} + 2}$

ومنه $= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 2/\sqrt{x})}$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$

وكذلك $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

و $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x+1} + 2} = +\infty$

④ لدينا $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt[3]{2x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$

ومنه $= \lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt[3]{2x}^2 + 2\sqrt[3]{2x} + 2^2)}$

وعليه $= \lim_{x \to 4} \frac{2(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)}{(\cancel{x-4})(\sqrt[3]{2x}^2 + 2\sqrt[3]{2x} + 2^2)}$

$= \lim_{x \to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt[3]{2x}^2 + 2\sqrt[3]{2x} + 2^2} = \frac{1}{2}$

إذن $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt[3]{2x} - 8}{\sqrt{x} - 2} = \frac{1}{2}$

التمرين 02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,2[$ بمايلي: $f(x) = \sqrt{x}(x-1) - 1$

• لدينا $x \to x - 1$ متصلة على $]1,2[$

و $x \to \sqrt{x}$ متصلة على $]1,2[$

إذن f دالة متصلة على $]1,2[$ لأنها جداء دالتين متصلتين

• ولدينا $f(1) = -1$

و $f(2) = -1 + \sqrt{2}$

إذن $f(1) \times f(2) < 0$

وحسب مبرهنة القيم الوسطية يوجد على الأقل عنصر α من المجال $]1,2[$ بحيث

$$f(\alpha) = 0$$

أي $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

من إنجاز التلميذة:

فاطمة الزهراء جدي.

التمرين 03

لدينا $f(x) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

1) أ. "لنحدد D_f

$D_f = \{x\in\mathbb{R} / \sqrt{x} \neq 0 , x \geq 0\}$

أي $D_f = \{x\in\mathbb{R} / x>0\}$

$D_f =]0,+\infty[$

ب لنحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 1$

لنحسب $\lim_{x\to0^+} f(x)$

لدينا. $\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

بما أنه $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0^+$

فإنه $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

وعليه $\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3=+\infty$

2) أ- لنبين أن

$(\forall x\in]0,+\infty[); f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

لدينا $f'(x) = \left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\right)'$

$f'(x) = 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

$f'(x) = 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)$

إذن $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

ب: لدينا $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 1$

إذن f تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

3) لنبين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على J

لدينا f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على J بحيث

$J = f]+\infty,0[=]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0} f(x)[$

$=]1,+\infty[$

4) لنحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

$f^{-1}(x)=y \iff f(y)=x$

$\iff \left(1+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^3 = x$

$\iff 1+\frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x}$

$\iff \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x}-1$

$\iff \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$\iff y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^2$

إذن. $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^2$ لكل x من $]1,+\infty[$