الثانوية الجاحظ التاهيلية	تصحيح : فرض محروس رقم 1 الدورة الاولى في مادة الرياضيات	السنة الدراسية : 2012/2013
المستوى : الثانية باك علوم تجريبية		استاذ : عبدالفتاح قويدر

تصحيح تمرين 1 :

1- لنبين ان: $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;0]$

لدينا $x \to x^3+x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتحديد على مجال $[-2;0]$ (لانها دالة حدودية)

وكذلك الدالة $x \to x^3+x+1$ **قابلة الاشتقاق على** $\mathbb{R}$ وبالتحديد على مجال $[-2;0]$ (لانها دالة حدودية)

وبالتالي : $f'(x)=(x^3+x+1)'=3x^2+1 \geq 0$

(لان $x^2 \geq 0$)

وبالتالي f دالة تزايدية على $[-2;0]$

-لنحسب $f(0)\times f(-2)$:

$f(0)=0^3+0+1=1$

و $f(-2)=(-2)^3-2+1=-9$

وبالتالي : $f(0)\times f(-2=1\times -9=-9<0$

ومنه فان المعادلة $f(x)=x^3+x+1=0$ تقبل حل وحيد في المجال$[-2;0]$

2- لنحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x}+3x$

$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+3x$

$=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}+3\right)=-\infty$

(لان $\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x^2}=1$)

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{x}$

$(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=0$ لان$)=\lim_{x\to+\infty}1-\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=1$

3) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt[3]{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)=+\infty$

(لان $\lim_{+\infty}\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}=0$)

4) $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x+22}-3}{2x-10}=\lim_{5}\frac{x+22-27}{2(x-5)(\sqrt[3]{x+22}+3\sqrt[3]{x+22}+3^2)}=\frac{1}{54}$

5) $\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}-1=0$

3- لنحل المتراجحة التالية : $\sqrt[5]{2x-1}\geq 2$

وبالتالي $\sqrt[5]{2x-1}\geq 2 \Leftrightarrow 2x-1\geq 32 \Leftrightarrow x\geq\frac{33}{2}$ $S=\left[\frac{33}{2};+\infty\right[$

التمرين الثاني :

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$

1- $x\in D_f \Leftrightarrow x+1\geq 0$ وبالتالي $D_f=[-1;+\infty[$

-الدالة $x\mapsto -1$ متصلة على$\mathbb{R}$ وبالخصوص على $[-1;+\infty[$(لانها دالة حدودية)

-الدالة $x\mapsto\sqrt[3]{x+1}$متصلة على $[-1;+\infty[$

وبالتالي f متصلة على$[-1;+\infty[$ (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

2- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-1=+\infty$

(لان $\lim_{+\infty}\sqrt[3]{x+1}=+\infty$)

3- لندرس قابلية الاشتقاق f في 0 : $f(0)=0$

$\lim_{0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

$=\lim_{0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$

وبالتالي f قابلة الاشتقاق في 0 ومنه فإن (C_f) يقبل مماسا معادلته :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{1}{3}x$

4- لنحسب $f'(x)$:

$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

وبالتالي $\forall x\in\,]-1;+\infty[\,; f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

5- جدول تغيرات الدالة f:

لدينا $\forall x\in\,]-1;+\infty[\,;\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}>0$

ومنه فإن f تزايدية قطعا على $]-1;+\infty[$

-جدول تغيرات الدالة f:

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad$ +
$f(x)$	$\nearrow$

6- لدينا f متصلة وتزايدية قطعا على $]-1;+\infty[$

ومنه فإن f تقبل دالة عكسية من $]-1;+\infty[$ نحو المجال J

تحديد J : $J=f([-1;+\infty[)=[f(-1);\lim_{+\infty}f(x)[$

لدينا $f(-1)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

وبالتالي فأن : $J=[-1;+\infty[$

7- لنحسب $f(1)$: $f(1)=\sqrt[3]{2}-1$

لنحسب f'(1): $f'(1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+1)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

بماأن f قابلة الاشتقاق في 1 و $f'(1)\neq 0$ ، وبالتالي f^{-1} قابلة الاشتقاق في $f(1)$

وبالتالي $(f^{-1})'(f(1))=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}}=3\sqrt[3]{4}$

8- لنحدد $f^{-1}(x)$:

ليكن x و y عنصرين من المجال $[-1;+\infty[$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1}-1=x$

$\Leftrightarrow y+1=(x+1)^3 \Leftrightarrow y=(x+1)^3-1$

وبالتالي $\forall x\in[-1;+\infty[\,; f^{-1}(x)=(x+1)^3-1$

التمرين 3 :

1- لدينا x_1 و x_2 و ... و x_nاعداد حقيقية من المجال $[a;b]$ و $f([a;b])=[m;M]$

فإن $m\leq f(x_i)\leq M$ لكل i من $\{1.2;\dots;n\}$

$$\underbrace{\boldsymbol{m}+\cdots+\boldsymbol{m}}_{\text{n مرة}}=\boldsymbol{nm}\leq\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}\leq\underbrace{\boldsymbol{M}+\cdots+\boldsymbol{M}}_{\text{n مرة}}=\boldsymbol{nM}$$

ومنه $\boldsymbol{m}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}\leq\boldsymbol{M}$

2- نضع ان : $g(x)=f(x)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}$

بماأن f متصلة على المجال $[a;b]$ فإن g متصلةعلى $[a;b]$ (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

لنبين ان $g(a)\times g(b)<0$:

لنحسب $g(a)$:

$$g(a)=f(a)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\boldsymbol{m}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}<\boldsymbol{0}$$

لان $\boldsymbol{m}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}$ **حسب سؤال(1)**

لنحسب $g(b)$:

$$g(b)=f(b)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\boldsymbol{M}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}>\boldsymbol{0}$$

لان $\boldsymbol{m}>\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}$ **حسب سؤال(1)**

ومنه $g(a)\times g(b)<0$

وبالتالي حسب مبرهنة القيم الوسطية فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الاقل حل c في $[a;b]$

اذن $g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f(x_i)}=0$

ومنه نستنتج ان $\exists c\in[a;b]\,;f(c)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$