| | | |
|---|---|---|
| أكاديمية الجهة الشرقية<br>نيابة وجدة | مـادة الـريـاضيات | الأستاذ : عثماني نجيب<br>مذكـرة رقـم /3 |

**مستوى : السنة الثانية من سلك الباكالوريا**
**شعبة العلوم التجريبية**
- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

# مذكرة رقم 3 في درس دراسة الدوال

*محتوى البرنامج*
- التمثيل المبياني لدالة عددية(تذكير):المقاربات الأفقية والعمودية و المائلة
- الفروع الشلجمية
- تقعر منحنى ونقط الانعطاف
- محور تماثل ومركز تماثل
- دراسة وتمثيل دوال لا جذرية ومثلثية

*القدرات المنتظرة*
- حساب مشتقات الدوال الاعتيادية
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها .
- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني
- الحل المبياني لمعادلة من الشكل : $f(x)=g(x)$ و متراجحات من الشكل : $f(x)\le g(x)$
- تحديد مشتقة و رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال و تمثيلها المبياني
- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية
- دراسة وتمثيل دوال حدودية وجذرية و لا جذرية و دوال مثلثية .

## I. التمثيل المبياني لدالة عددية(تذكير):

في جميع الفقرات المتبقية, $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ و $(C)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

### 1)المقارب الموازي لمحور الأراتيب:

**تعريف:** إذا كانت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحنى $(C)$ يوازي محور الأراتيب.

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

**أجوبة:** (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1>0\}$

$x>1\Leftrightarrow x-1>0$

ومنه: $D_f=]1;+\infty[$

(2 $\lim\limits_{x\to 1^+}2x=2$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0^+$ ومنه: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى $(C)$ يوازي محور الأراتيب

### 2)المقارب الموازي لمحور الأفاصيل:

**تعريف:** إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ )نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$ ) يوازي محور الأفاصيل.

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

**أجوبة :**

(1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0\}$

$x^2-1=0\Leftrightarrow x^2-1^2=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ يوازي محور الأفاصيل.

### 3)المقارب المائل:

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ بحيث $f$ تقبل نهاية لا منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$ ).

**تعريف:**

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ ( أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$ )حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$ نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$ ).

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$

2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$

**أجوبة :** أجوبة: (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x>0\}$

$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=-1$

نستعمل جدول الاشارة :

| $x$ | $-\infty$ $\quad -1 \quad\quad 0 \quad +\infty$ |
|---|---|
| $x^2+x$ | $+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$ |

ومنه: $D_f=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

2) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \Leftrightarrow f(x)-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

اذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}=0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$

**خاصية:** يكون المستقيم دو المعادلة $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ مقاربا مائلا للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ .

لدينا نفس الخاصية إذا عوضنا" $x$ يؤول إلى $+\infty$ " ب " $x$ يؤول إلى $-\infty$ "

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$

**أجوبة:** (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4x-5\geq 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-5)=16+20=36=6^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{4+6}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$ و $x_2=\frac{4-6}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$ ومنه جدول الاشارة :

| $x$ | $-\infty \quad -1 \quad\quad 5 \quad +\infty$ |
|---|---|
| $x^2-4x-5$ | $+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$ |

ومنه: $D_f=]-\infty;-1]\cup[5;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x-5}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x-5=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}}{x}$

لدينا : $x\to+\infty$ ومنه : $|x|=x$ ومنه

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=1\sqrt{1}=1=a$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-1x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x-5}-1x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x-5}+1x\right)\left(\sqrt{x^2-4x-5}-1x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4x-5}+x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-5-x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x-5}{x\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}+1}=-\frac{4}{2}=-2=b$

4) ومنه : $y=ax+b$ أي $y=x-2$ مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$

**تمرين1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1. حدد $D_f$ و حدد $f'(x)$
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. بين : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$ و أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$
4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $-\infty$

**أجوبة :** (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2+2x-2\geq 0\}$

$4x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ و $x_2=\frac{-4}{4}=-1$ ومنه جدول الاشارة :

| $x$ | $-\infty \quad -1 \quad\quad 1/2 \quad +\infty$ |
|---|---|
| $4x^2+2x-2$ | $+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$ |

ومنه: $D_f=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$

لدينا : $x\to-\infty$ ومنه : $|x|=-x$ ومنه

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

4) ومنه: $y=ax+b$ أي $y=-2x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $-\infty$

## II. الفروع الشلجمية:

لتكن $f$ دالة عددية تقبل نهاية لا منتهية بجوار $+\infty$.

**تعريف1:**

▪ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

▪ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ نقول أن المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

**مثال1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=\sqrt{2-x}$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. أدرس الفرع الشلجمي لمنحنى الدالة $f$ بجوار $-\infty$

**أجوبة:** 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2-x\geq 0\}$

$x\leq 2 \Leftrightarrow 2-x\geq 0$

ومنه: $D_f=]-\infty;2]$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2-x=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{x\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x\sqrt{2-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{2-x}}=-1\times 0=0$

التأويل المبياني: منحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

**مثال2:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. أدرس الفرع الشلجمي لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$

**أجوبة:** 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}$

$x\geq 1\Leftrightarrow x-1\geq 0$

ومنه: $D_f=[1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$

التأويل المبياني: منحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

**تعريف 2:**

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ حيث $\left(a\in\mathbb{R}^*\right)$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax)\right)=\infty$

نقول إن المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$.

نعرف بالمثل الفروع الشلجمية بجوار $-\infty$.

**مثال1:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$f(x)=\sqrt{2x-1}-x$

1) حدد $D$ مجموعة تعريف الدالة $f$.

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) أدرس الفروع ألانهائية لمنحنى الدالة $f$.

**أجوبة:** 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0\}$

$x\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-1\geq 0$

ومنه: $D_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}-x$ ش غ م

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x-1}-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x-1}}{x}-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-1=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-1x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}=+\infty$

التأويل المبياني: منحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ بجوار $+\infty$

## III. تقعر منحنى-نقط انعطاف:

**خاصية:** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $I$ و $(C_f)$ منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- إذا كانت $f''$ موجبة على المجال $I$ فإن للمنحنى $(C_f)$ تقعرا موجها نحو محور الأراتيب الموجبة.
- إذا كانت $f''$ سالبة على المجال $I$ فإن للمنحنى $(C_f)$ تقعرا موجها نحو محور الأراتيب السالبة.
- إذا كانت $f''$ تنعدم في النقطة $x_0\in I$ وتتغير إشارتها بجوار $x_0$ فان النقطة $A(x_o;f(x_o))$ نقطة انعطاف المنحنى $(C_f)$.

**مثال:** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$
2. أدرس تقعر المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ مع تحديد نقطتي انعطافه

**الجواب :** 1)

$f'(x)=\left(\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}\right)'=\frac{1}{12}4\times x^3-4x+1=\frac{1}{3}x^3-4x+1$

$f''(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x+1\right)'=x^2-4$

(2 $f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

• تقعر $(C_f)$ موجه نحو محورالأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

• تقعر $(C_f)$ موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-2,2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

المشتقة الثانية تنعدم وتتغير اشارتها في : $x_0=-2.;x_0=2$

اذن هناك نقطتي انعطاف هما : $A(2;f(2))$ و $A(-2;f(-2))$

## IV. محور تماثل-مركز تماثل:

**خاصيات:**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $D$ , و $(C)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم و $a$ و $b$ عنصرين من $\mathbb{R}$.

▪ يكون المستقيم ذو المعادلة: $x=a$ محور تماثل للمنحنى $(C)$ إذا وفقط إذا كان:

لكل $x$ من $D$ , لدينا: $(2a-x)\in D$ و $f(2a-x)=f(x)$

▪ تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل للمنحنى $(C)$ إذا و فقط إذا كان:

لكل $x$ من $D$ , لدينا: $(2a-x)\in D$ و

. $f(2a-x)=2b-f(x)$

**ملحوظة:**

▪ إذا كانت $f$ دالة زوجية فان محور الأراتيب محور تماثل منحناها (في معلم متعامد)

▪ إذا كانت $f$ دالة فردية فان أصل المعلم مركز تماثل منحناها.

**مثال1:** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة $f$
2. بين أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$

**الجواب:**

(1 $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-x^2\ge 0\}$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

ومنه جدول الاشارة :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-x^2$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

ومنه: $D_f=[0,1]$

(2 $x=a$ يعني $x=\frac{1}{2}$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in[0,1]$ فان : $1-x\in[0,1]$ ؟؟؟

$x\in[0,1]\Leftrightarrow 0\le x\le 1\Leftrightarrow -1\le -x\le 0\Leftrightarrow 1-1\le 1-x\le 1+0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le 1-x\le 1\Leftrightarrow 1-x\in[0,1]$

ب) نبين أن : $f(1-x)=f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$

ومنه $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة $f$ .

**مثال2:** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$

1. بين أن $\forall\in D_f\ f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$
2. بين أن النقطة $\Omega(-1;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة $f$ .

**الجواب:** (1 $x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$

(2 $\Omega(-1;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ)نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فان : $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ؟؟؟

$x\in\mathbb{R}-\{-1\}\Leftrightarrow x\ne -1\Leftrightarrow -x\ne 1\Leftrightarrow -2-x\ne -2+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-x\ne -1\Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

ب)نبين أن : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$

$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة $f$ .

## V. دراسة بعض الدوال:

**1)دراسة دالة حدودية:**

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. أدرس زوجية الدالة $f$
3. أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات $D_f$
4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحنى الدالة $f$
5. أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة $f$
7. حدد معادلة لمماس المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$
8. حدد نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. حدد مطا ريف الدالة $f$ اذا وجدت
10. أرسم المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم

**أجوبة :** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه $f$ دالة فردية

(3 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

(4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

$(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

$(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

6)

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $16/3$ | $\searrow$ | $-16/3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

7) معادلة لمماس ل $(C_f)$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1) \Leftrightarrow y=-3x+\frac{2}{3}$

8) أ) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

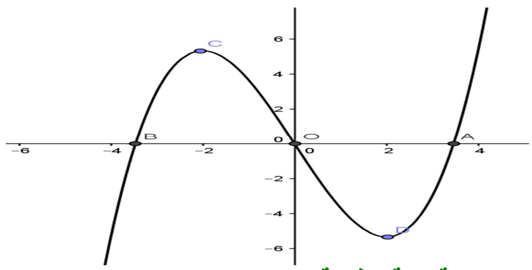
ب) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

9) $f(2)=-\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة $f$

$f(-2)=\frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة $f$

10) التمثيل المبياني للدالة $f$



## 2) دراسة دالة جذرية:

**مثال:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+2}$

1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2. حدد الأعداد الحقيقية $a$ و $b$ و $c$ بحيث

لدينا: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ $\forall x\in D_f$

3. أحسب النهايات عند محدات $D_f$
4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة $f$

(تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل $C_f$.)

5. بين أن النقطة $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة $f$ .
6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.
7. أعط جدول تغيرات $f$ على $D_f$ .
8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. أعط معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 0.
10. أنشئ المنحنى $C_f$ .

**أجوبة :**

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq0\}$ ومنه

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) نقوم بالقسمة الاقليدية ل $x^2+x-1$ على $x+2$ فنجد :

$x^2+x-1=(x+2)(x-1)+1$

اذن : $f(x)=\frac{(x+2)(x-1)+1}{x+2}=\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}+\frac{1}{x+2}=x-1+\frac{1}{x+2}$

ومنه : $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

3) $\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ و $\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

4) $x=-2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

$f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$ يعني $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+2}$

يعني $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذ المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذ المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$

5) $\Omega(-2;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ فان : $-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ ؟؟؟

$x\in\mathbb{R}-\{-2\}\Leftrightarrow x\neq-2\Leftrightarrow -x\neq2\Leftrightarrow -4-x\neq-4+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4-x\neq-2\Leftrightarrow -4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

ب) نبين أن : $f(-4-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$

$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة $f$ .

6) $f'(x)=\left(x-1+\frac{1}{x+2}\right)'=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2-1}{(x-2)^2}$ يعني

$f'(x)=\frac{(x+2)^2-1^2}{(x+2)^2}=\frac{(x+2-1)(x+2+1)}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $(x+1)(x+3)$

$(x+1)(x+3)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x+3=0$ يعني $x=-1$ أو $x=-3$

جدول الإشارة :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

7) جدول تغيرات الدالة :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

8) أ) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{x^2+x-1}{x+2}=0$

يعني $x^2+x-1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=1$ و $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right)$ أو $B\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0\right)$

ب)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=-\frac{1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

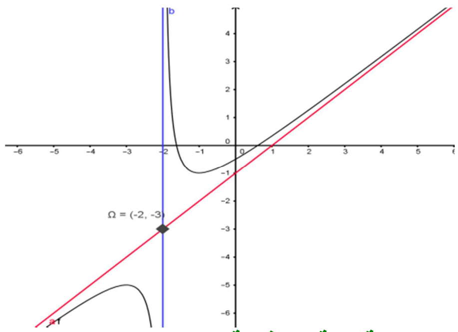
9) معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 2.

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f(0)=-\frac{1}{2}$ و $f'(0)=\frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)^2}=\frac{3}{4}$

$y=f(0)+f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x$

10)التمثيل المبياني للدالة :




## 3)دراسة دالة لاجذرية:

**مثال:** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي :

$f(x)=-1+\sqrt{1-x}$

ليكن $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)أ)حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$ ب)حدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ج)أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2)أدرس تغيرات الدالة $f$ و حدد جدول تغيرات الدالة $f$

3)أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة $f$

4) أ)بين أن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على مجال $J$ يجب تحديده

ب)حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x$ من $J$

ج)املأ الجدول التالي

| $x$ | -8 | -3 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

وأنشئ $(C_f)$ و$(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة $f^{-1}$ في نفس المعلم

**أجوبة :** 1)أ) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x\ge0\}$

$x\le1\Leftrightarrow 1-x\ge0$

ومنه: $D_f=]-\infty;1]$

ب) $\lim_{x\to-\infty}1-x=+\infty$ ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ج)دراسة قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$ :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ :

ومبيانيا نقول ان منحنى الدالة $f$ يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب على يسار النقطة : $A(1;f(1))$ أي $A(1;-1)$ وموجه نحو الأعلى

2) $\forall x\in]-\infty;1]\ f'(x)=\left(-1+\sqrt{1-x}\right)'=0+\frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}<0$

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $1$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ $\searrow$ $-1$ |

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{1-x}{x\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{1-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}+\frac{-x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0-1\times0=0$$

التأويل المبياني: منحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

4) أ) $f$ دالة متصلة على المجال $I=]-\infty;1]$ و $f$ تناقصية قطعا

ومنه $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة

على مجال: $J=f(I)=f(]-\infty;1])=[-1;+\infty[$

ب) $\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}$

$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in]-\infty;1]\end{cases}$ يعني $-1+\sqrt{1-y}=x$

يعني $\sqrt{1-y}=x+1$ $2y-1=x^2$

يعني $\left(\sqrt{1-y}\right)^2=(x+1)^2$ يعني $1-y=(x+1)^2$ يعني $y=1-(x+1)^2$

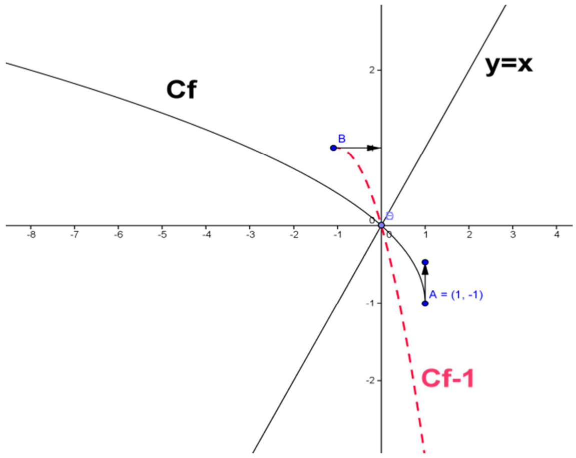
يعني $y=-x^2-2x$

ومنه : $\forall x\in[-1;+\infty[\ f^{-1}(x)=-x^2-2x$

4) ج)

| $x$ | -8 | -3 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 1 | 0 | -1 |

منحنى الدالة $f^{-1}$ هو مماثل منحنى الدالة $f$ بالنسبة للمستقيم : $y=x$ في معلم متعامد ممنظم




**تمرين: للبحث** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي :

$f(x)=\sqrt{x-2x^2}$ ليكن $(C_f)$ الممثل للدالة $f$

في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=8cm$

1) حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=0$ وعلى اليسار عند $x_0=2$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها

3) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{1}{4}$ محور تماثل للمنحنى $(C_f)$

4)أنشئ $(C_f)$بين أن قصور الدالة $f$ على المجال $I=\left[0;\frac{1}{4}\right]$

تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده وحدد $f^{-1}(x)$

لكل $x$ من $J$

**مثال:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2. أدرس زوجية الدالة $f$
3. أحسب النهايات عند محدات $D_f$
4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة $f$
(تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل $C_f$).
5. بين أن النقطة $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة $f$ .
6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.
7. أعط جدول تغيرات $f$ على $D_f$.
8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. أعط معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 0.
10. أنشئ المنحنى $C_f$.

**أجوبة :**

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq0\}$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2)نقوم بالقسمة الاقليدية ل $x^2+x-1$ على $x+2$ فنجد : $x^2+x-1=(x+2)(x-1)+1$

اذن : $f(x)=\frac{(x+2)(x-1)+1}{x+2}=\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}+\frac{1}{x+2}=x-1+\frac{1}{x+2}$

ومنه : $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

3) $\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ و $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

4) $x=-2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

$f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$ يعني $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+2}$

يعني $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$

5) $\Omega(-2;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ)نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ فان : $-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ ؟؟؟

$-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}\Leftrightarrow -4-x\neq-2\Leftrightarrow \Leftrightarrow -4-x\neq-4+2\Leftrightarrow -x\neq 2\Leftrightarrow x\neq-2\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

ب)نبين أن : $f(-4-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$$

$$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة $f$ .

6) $f'(x)=\left(x-1+\frac{1}{x+2}\right)'=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2-1}{(x-2)^2}$ يعني

$$f'(x)=\frac{(x+2)^2-1^2}{(x+2)^2}=\frac{(x+2-1)(x+2+1)}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $(x+1)(x+3)$

$(x+1)(x+3)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x+3=0$ يعني $x=-1$ أو $x=-3$

جدول الإشارة :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

7) جدول تغيرات الدالة :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

8) أ)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{x^2+x-1}{x+2}=0$

يعني $x^2+x-1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=1$ و $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right)$ أو $B\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0\right)$

ب)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=-\frac{1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

9) معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 2.

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (2

$f'(0)=\frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)^2}=\frac{3}{4}$ و $f(0)=-\frac{1}{2}$

$y=f(0)+f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x$

10)التمثيل المبياني للدالة :