السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	دراسة الدوال حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : نعتبر الدالة العددية $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

1

لدينا :
$$Df=\{x\in IR\ /\ x^2-1\neq 0\}$$
$$Df=\{x\in IR\ /(x-1)(x+1)\neq 0\}$$
$$Df=\{x\in IR\ /x-1\neq 0\ \ et\ \ x+1\neq 0\}$$
$$Df=\{x\in IR\ /x\neq 1\ et\ \ x\neq -1\}$$
$$Df=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

، $x\in Df\ \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x\neq -1 \\ -x\neq 1\end{cases} \Rightarrow -x\in Df$

و $\forall x\in IR\ \ f(-x)=\dfrac{2(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2}{x^2-1}=f(x)$ ، إذن f زوجية

2

لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto 1} 2x^2=2$ و $\lim\limits_{x\mapsto 1} x^2-1=0$ ، إذن يجب تحديد إشارة المقام x^2-1

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
x^2-1	+	-	+

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}} x^2-1=0^+$ منه : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}} f(x)=+\infty}$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} x^2-1=0^-$ منه : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} f(x)=-\infty}$

مما يعني أن منحنى الدالة يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=1$

ولدينا : $\boxed{\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2}$ إذن منحنى الدالة يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=2$ جوار $+\infty$

رياضيا لا يصح كتابة : $\lim\limits_{x\mapsto 1} f(x)=\dfrac{2}{0}=\infty$ ، لكننا قد نستعملها في الحصص الدراسية وربما حتى الفروض ، لكن رغم ذلك تظل تعبيرا غير صحيح من الناحية الرياضياتية ، لذلك ستكون مرفوظة في الامتحان الوطني ، من أجل ذلك الأفضل التعود على استعمال التعليل الرياضي السليم

3

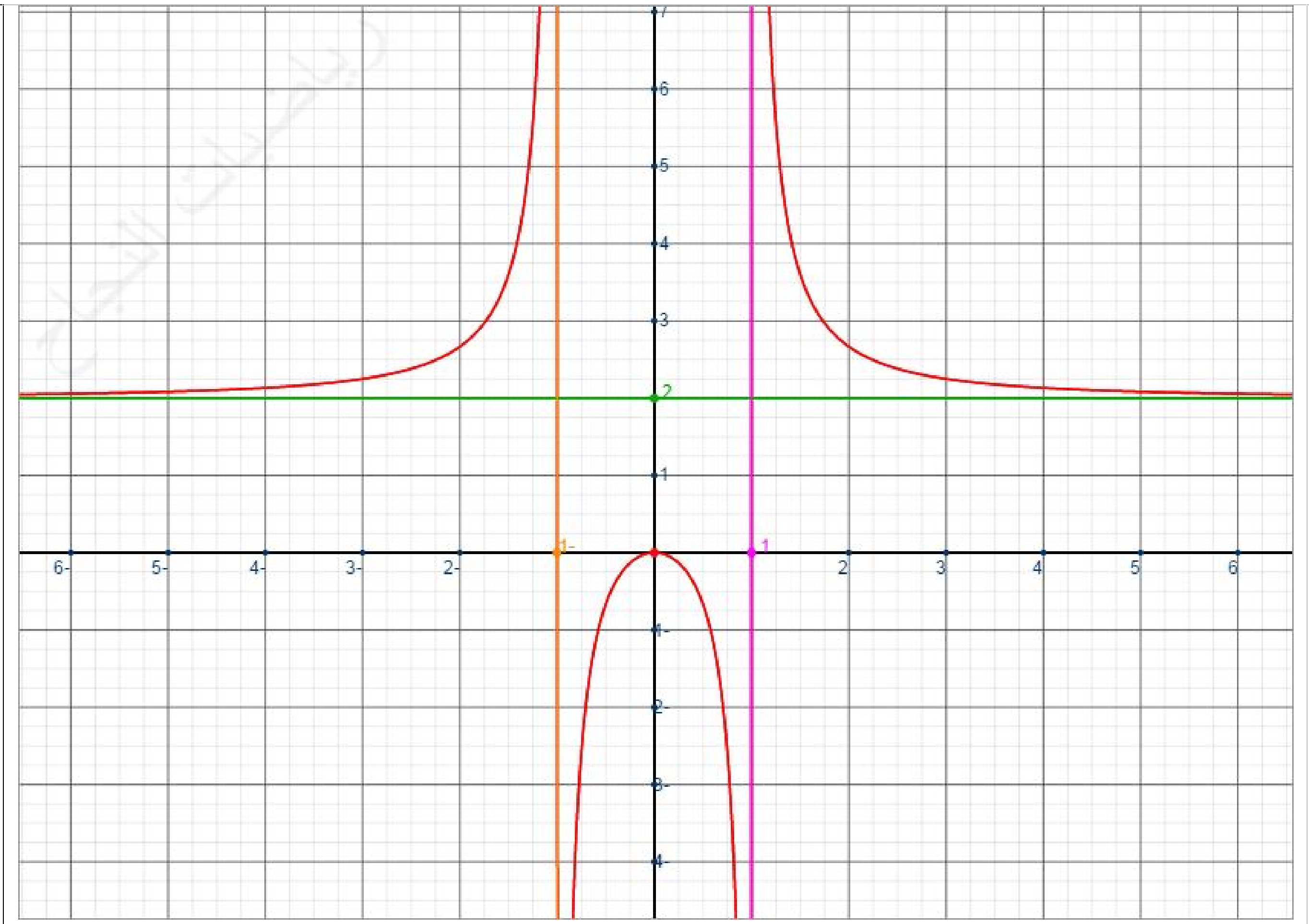
$$\boxed{\forall x\in Df\quad f'(x)=\frac{(2x^2)'(x^2-1)-2x^2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{4x(x^2-1)-2x^2\times 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^3-4x-4x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}}$$

طبقنا قاعدة مشتقة خارج : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

4

x	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 $+\infty$
$-4x$	+	+	-	-
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$

5



أهم ما يجب احترامه في منحنى الدالة هو تطابق المنحنى مع النتائج المحصل عليها في الأسئلة من مماسات و مقاربات و زوجية و فروع لانهائية .... في المنحنى أعلاه المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ (اللون الأخضر) يمثل مقاربا أفقيا ($\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 2$)
بينما المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ (اللون البنفسجي) يمثل مقاربا عموديا ($\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$) و نظرا لكون الدالة زوجية فإن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو أيضا مقارب عمودي.

تمرين 2 : نعتبر الدالة العددية $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 8}{4x}$ و ليكن Cf تمثيلها المبياني في معلم متعامد.

1

$$\boxed{Df = \{x \in IR \ / \ 4x \neq 0\} = \{x \in IR \ / \ x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[}$$

(يستحسن كتابة مجموعة التعريف على شكل اتحاد مجالات عوض $IR_{\setminus\{0\}}$)

2

$$\boxed{\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{2} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x}{2} = -\infty}$$

لدينا : $\lim\limits_{x \mapsto 0} 2x^2 + x + 8 = 8$ و $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x>0}} 4x = 0^+$ و $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x<0}} 4x = 0^-$ إذن : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty}$

المحدات نعني بها $+\infty$ و $-\infty$ (إن لم تكن الدالة معرفة على مجال محدود) و الأعداد التي لا تنتمي إلى مجموعة التعريف و تمثل أحد أطراف مجموعة التعريف، مثلا إذا كان : $Df =]-4, 2] \cup]7, +\infty[$ فالمحدات هي $+\infty$ و -4 و 7

3

لدينا : $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} - \frac{2x+1}{4} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} - \frac{2x^2 + x}{4x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{8}{4x} = 0}$

و $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{8}{4x} = 0}$ إذن : $(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ مقارب مائل لـ Cf جوار $+\infty$ و جوار $-\infty$

عندما نتوفر على معادلة المقارب لا داعي لتطبيق مراحل البحث عن المقارب (أثناء دراسة الفروع اللانهائية)

4

لدينا :

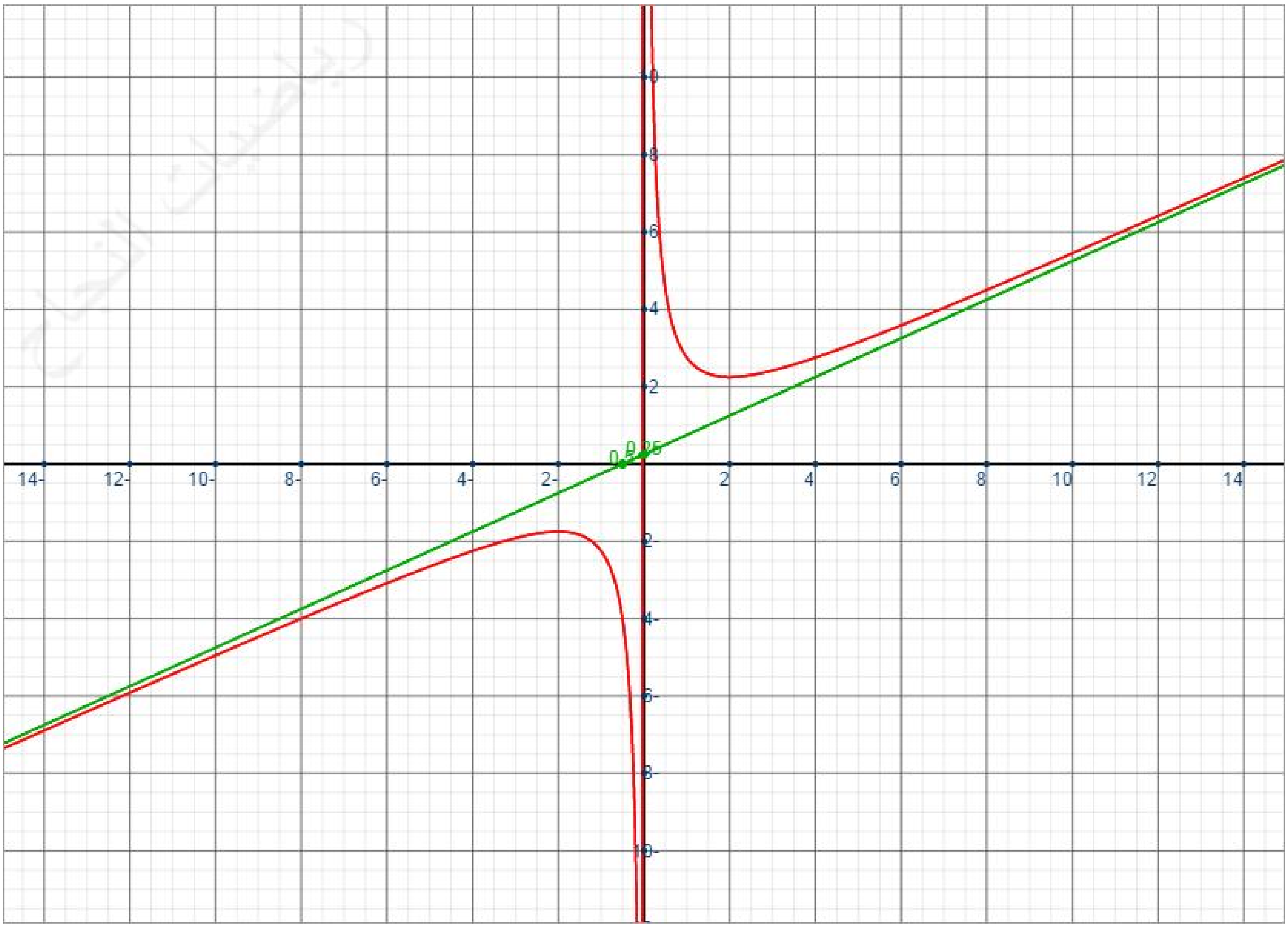
$$\forall x\in Df \quad f'(x)=\frac{(2x^2+x+8)'(4x)-(2x^2+x+8)(4x)'}{(4x)^2}=\frac{(4x+1)(4x)-(2x^2+x+8)\times 4}{16x^2}$$

$$f'(x)=\frac{16x^2+4x-8x^2-4x-32}{16x^2}=\frac{8x^2-32}{16x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

منه :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2-4		$+$		$-$	||	$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	||	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-7}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5



تمرين 3 : نعتبر الدالة العددية $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x}$

1

$$Df=\{x\in IR \,/\, x\neq 0\}$$
$$Df=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

2

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^3-2}{x}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\mapsto-\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3-2}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty}x^2=+\infty$$

لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto 0} x^3-2=-2$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} x=0^+$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} x=0^-$: إذن $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)=-\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} f(x)=+\infty}$

3

نعلم أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ ولدينا : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x}\times\frac{x^3-2}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=+\infty$ ولدينا : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{1}{x}\times\frac{x^3-2}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x=-\infty$

إذن Cf يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$ و $-\infty$

4

$$\forall x\in Df \quad f'(x)=\frac{(x^3-2)'(x)-(x^3-2)(x)'}{(x)^2}=\frac{(3x^2)(x)-(x^3-2)\times1}{x^2}=\frac{3x^3-x^3+2}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+2}{(x)^2}=\frac{2(x^3+1)}{x^2}=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}$$

5

ولدينا : $\forall\in Df \quad x^2>0$

ولدينا محددة الحدودية x^2-x+1 هي $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$ فهي موجبة $(a=1>0)$

منه :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	+	+	
$f'(x)$	-	+	+	
$f(x)$	$+\infty \searrow 3$	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	

6