

تمرين 1:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث :

$$f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

1- أ- تحقق أن : $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

ب- احسب نهايات f عند محداث D_f

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في -1 .

ب- بين أن لكل x من $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 أ- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
 ب- انشئ (C).

تمرين 2:

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty, 4[$ بما يلي :

$$f(x) = x - 4 + 2\sqrt{4-x}$$

(C) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_0 = 4$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصلة.

3- أ- بين أنه لكل x من $]-\infty, 4[$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4-x} - 1}{\sqrt{4-x}}$$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f .

4- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

5- حدد نقط تقاطع المنحنى (C) ومحور الأفاصل.

6- اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الأصول 0.

7- احسب $f(-5)$ ثم انشئ المستقيم (T) والمنحنى (C) (الوحدة 1cm).

تمرين 3:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + x}$

و (C) منحناها في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

-1 بين أن $]0, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ هي مجموعة تعريف الدالة f .

-2 حدد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

-3 بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $x = -\frac{1}{2}$ هو محور تماثل لـ (C).

-4 بين أن $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = -(2x+1) \left(\frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \right)$

-5 ضع جدول تغيرات الدالة f في المجال $]0, +\infty[$.

-6 حدد الفرع اللانهائي لـ (C) بجوار $+\infty$

-7 حل في $]0, +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$.

-8 أنشئ (C).

تمرين 4:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$

(C) منحنى f في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

-1 حدد D حيز تعريف f واحسب نهايتي f عند محدي D .

-2 حدد الفرعين اللانهائيين لـ (C).

-3 أ- احسب $f'(x)$ وتحقق أنه لكل x من D : $f'(x) = x(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

ب- حدد جدول تغيرات f .

-4 أ- احسب $f''(x)$ لكل x من D .

ب- بين أن $A \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$ نقطة انعطاف (C).

-5 أنشئ (C) وحدة القياس : 2 cm.

-6 لنكن g قصور f على المجال $I = \left] -\frac{1}{2}, 0 \right]$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 5:

I- نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x بحيث :

$$h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}$$

1- اعط جدول تغيرات الدالة h على \mathbb{R}^+ .

2- استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \leq 0$

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$f(x) = (4x - 1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة : 2 cm

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$ على اليمين واعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

2- أ- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \quad f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

ب- اعط جدول تغيرات f (لحساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$ يمكنك

استعمال المتساوية : $f(x) = x^2 \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - 4 + \frac{1}{2x^2} \right)$ لكل x من \mathbb{R}^{*+} .

ج- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) .

3- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[\frac{1}{4}, +\infty \right[$.

أ- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ $x \in I$ تقبل حلا وحيدا α ثم تحقق من أن $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

4- انشئ في نفس المعلم R المنحنى (C) الممثل للدالة f والمنحنى (Γ) الممثل للدالة العكسية g^{-1}

للدالة g (قبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$) .

تمرين 6:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

1- حدد نهاية f عند $+\infty$ ونهايتها عند $-\infty$

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1 وعلى اليسار في -1 واعط تأويلا هندسيا للنتيجتين .

ب- حدد الدالة المشتقة للدالة f .

ج- بين أن $f'(x) > 0$ لكل x من $]1, +\infty[$ وأن $f'(x) < 0$ لكل x من $] -\infty, -1[$

د- ضع جدول تغيرات f .

3- أ- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب- أنشئ المنحنى (C) .

4- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1, +\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال ينبغي تحديده .

ب- انشئ المنحنى الممثل للدالة g^{-1} في المعلم أعلاه .

تمرين 7:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = 2x - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}$$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم (O, \bar{i}, \bar{j})

1- أ) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

ب) بين أن الدالة f فردية . نأخذ مجال دراسة الدالة f .

2- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3- أ) بين أنه لكل x من I : $f(x) - (2x - 1) = \frac{-3}{x(x + \sqrt{x^2 + 3})}$

ب) استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ج) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) على I .

4- أ) بين أنه لكل x من I : $f'(x) = 2 + \frac{3}{x^2 \sqrt{x^2 + 3}}$

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f على I .

5- أ) حدد نقطة تقاطع (C) مع محور الأفاصيل على المجال I. ثم اعط معادلة المماس

للمنحنى (C) في هذه النقطة .

ب) نقبل أن إشارة $f''(x)$ هي عكس إشارة x لكل x من D . وأن قيمة مقربة للعدد

الموجب α الذي يحقق $f(\alpha) = \alpha$ هي 1,52 . أنشئ (C) . (نأخذ $\|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = 2\text{cm}$)

معللا إنشاءك على المجال $]-\infty, 0[$.

6- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]0, +\infty[$.

أ) بين أن g تقابل من I نحو مجال ينبغي تحديده .

ب) أنشئ (C') منحنى g^{-1} الدالة العكسية للدالة g (في نفس المعلم) .

تمرين 8:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[-2, +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = 2\sqrt{(x+2)(x-3)}$$

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{x-3}$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)}{x-3}$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{f(x)}{x+2}$

2- أ) بين أن إشارة $f'(x)$ على $]-2, 3[$ هي إشارة $(1-2x)$ ، وأن f' موجبة قطعاً على $]3, +\infty[$

ب) اعط جدول تغيرات الدالة f .

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \bar{i}, \bar{j})

وليكن (D) المستقيم ذا المعادلة $y = 2x - 1$

أ) بين أن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على المجال $]3, +\infty[$

ج) ارسم (C) .

تمرين 9:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$

- 1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ وأول النتيجة هندسيا .
- 3- ادرس قابلية اشتقاق f في -2 على اليسار و في 0 على اليمين .
- 4- أ- بين أنه لكل x من $]0, +\infty[\cup]-\infty, -2[$ لدينا : $f'(x) = \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$
 ب- استنتج أن f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$ وتناقصية قطعاً على $] -\infty, -2[$
- 5- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})
 أ- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
 ب- أنشئ (C) .
- 6- ليكن g قصور الدالة f على $]0, +\infty[$
 أ- بين أن g تقابل من \mathbb{R}^+ نحو مجال J ينبغي تحديده .
 ب- لكل x من J حدد $g^{-1}(x)$ بدلالة x .

تمرين 10:

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم (o, \vec{i}, \vec{j})

1-a- حدد D حيز تعريف الدالة f .

b- احسب كلا من النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

2-a- تحقق من أن :

$$\forall x \in D : f(x) - \left(\frac{x+1}{2x}\right) = \frac{x+1}{2x} \left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$$

b- استنتج أن المستقيم $(\Delta_1): y = \frac{x+1}{2}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$

c- بين أن $(\Delta_2): y = -\frac{x+1}{2}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $-\infty$

3-a- بين أن $f'(x) = \frac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$ لكل x من D .

b- تحقق من أن f تزايدية على المجال $]3, +\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]0, 3[$ و $] -\infty, 0[$.

c- اعط جدول تغيرات الدالة f .

4-a- حدد تقاطع (C) مع محور الأفاصيل.

b- نقبل أن $A(x_0, y_0)$ حيث $x_0 \approx -5,2$ و $y_0 \approx 2,9$ هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C) وأن $f''(x)$ سالبة

على المجال $]x_0, 0[$ وموجبة على كل من المجالين $] -\infty, x_0[$ و $]0, +\infty[$. نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

أنشئ C .