ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

حساب الاحتمالات

المبدأ: لتكن E تجربة تتطلب نتائجها k اختيارا.
إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 طريقة مختلفة, و الاختيار الثاني يتم ب n_2 طريقة مختلفة....و الاختيار k يتم ب n_k طريقة مختلفة. فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1\times n_2\times n_3\times\cdots\times n_k$.

عدد عناصر مجموعة منتهية E يسمى رئيسي E و نرمز له ب $CardE$.

خاصيات: لكل n من $\mathbb{N}^*$, و لكل p من $\mathbb{N}$ بحيث $0\le p\le n$, لدينا:

- عدد التبديلات ل n عنصر من بين n هو: $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ و نضع $0!=1$.

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$.

- عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n هو n^p.
- عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصرا. له بالرمز A_n^p و لدينا: $A_n^p=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)$
- عدد التأليفات ل p عنصر من بين n هو $\dfrac{A_n^p}{p!}$, و نرمز له بالرمز C_n^p

و لدينا $C_n^p=\dfrac{n!}{p!\times(n-p)!}$ و $C_n^p=C_n^{n-p}$ و $C_{n+1}^{p+1}=C_n^p+C_n^{p+1}$

و $C_n^0=1$ و $C_n^n=1$ و $C_n^{n-1}=n$ و $C_n^1=n$

ملاحظة :

- عند السحب بالتتابع وبدون إحلال نستعمل الرمز A_n^p
- عند السحب الآني نستعمل الرمز C_n^p
- عند السحب بالتتابع وبإحلال نستعمل الرمز مبدأ الجداء

خاصية: ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية:

- $p(\Omega)=1$ و $p(\phi)=0$
- لكل حدث A, $0\le p(A)\le1$
- وكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A\cap B=\phi$) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
- لكل حدث A لدينا : $p(\overline{A})=1-p(A)$
- لكل حدثين A و B لدينا : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω, فان احتمال كل حدث A هو: $p(A)=\dfrac{CardA}{Card\,\Omega}$

الاحتمال الشرطي: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث $P(A)\neq0$. احتمال الحدث B , علما أن الحدث A محقق, هو العدد الذي نرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$.

ولدينا: $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

استقلالية حدثين: لقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا كان: $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي:مثال: يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1, 2, 2, 2 لا يمكن التمييز بينها باللمس.ونسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية. وليكن X المتغير العشوائي التي يترابط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

في هذه الحالة, إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على ا لتوالي فان: $x=1+0=1$

و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 على التوالي فان $x=1+2=3$ وهكذا نجد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X و هي تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $X(\Omega)$ في هذا المثال لدينا: $X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

نرمز للحدث:" الحصول على مجموع يساوي 2" بالرمز: $(X=2)$

قانون احتمال متغير عشوائي: غالبا ما نلخص قانون احتمال X في جدول:
لنحدد في المثال السابق قانون احتمال المتغير العشوائي X.
لدينا: $X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

- $(X=1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة تحمل الرقم 1. إذن $p(X=1)=\dfrac{C_1^1\times C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$.
- $(X=2)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2 , و على كرة تحمل الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.
إذن: $p(X=2)=\dfrac{C_1^1\times C_3^1+C_2^2}{C_6^2}$
- $(X=3)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة تحمل الرقم 2. إذن $p(X=3)=\dfrac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{3}{5}$
- $(X=4)$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, إذن:
$p(X=4)=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

حساب الأمل الرياضي-المغايرة-الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

الأمل الرياضي هو:
$$E(X)=\left(1\times\frac{2}{15}\right)+\left(2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3\times\frac{6}{15}\right)+\left(4\times\frac{3}{15}\right)=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$$

- المغايرة هي:
$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$$
$$V(X)=\left(1^2\times\frac{2}{15}\right)+\left(2^2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3^2\times\frac{6}{15}\right)+\left(4^2\times\frac{3}{15}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

- الانحراف الطرازي هو: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

الاختبارات المتكررة والمتغير العشوائي الحداني: نعتبر اختبارا بحيث نهتم فقط بتحقق أو عدم تحقق حدث A ليكن p احتمال الحدث A $p=p(A)$

نكرر هذا الاختبار n مرة متتالية وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A في نفس الظروف لدينا الخاصية التالية:

خاصية: احتمال تحقق الحدث A k مرة بالضبط هو: $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ لكل k من $\{0;1;2;\cdots;n\}$

X يسمى **لمتغير عشوائي حداني وسيطاه هما : n و p**

ولدينا : $E(X)=n\times p$ و $V(X)=n\times p\times(1-p)$

الأستاذ : نجيب عثماني