الإحتمال

I) التعداد

1) رئيسي مجموعة

نسمي رئيسي مجموعة منتهية E عدد عناصرها ، ونرمز له ب $card(E)$

2) عاملي عدد طبيعي

ليكن n عدد طبيعي . نسمي عاملي n ، العدد الذي نرمز له ب $n!$ والمعرف بما يلي :

*) $n! = 1.2.3.......n$ إذا كان $n \neq 0$.

*) $0! = 1$.

3) مبدأ الجداء .

إذا كان علينا أن ننجز p اختيارا ، وكان لدينا :

*) n_1 طريقة للإختيار رقم 1 .

*) n_2 طريقة للإختيار رقم 2 .

$\vdots$

*) n_p طريقة للإختيار رقم p .

فإن عدد الطرق التي تتم بها هذه الأختيارات هو $n_1.n_2......n_p$.

4) الترتيبات –التبديلات – التاليفات

لتكن $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ مجموعة مكونة من n عنصر . و $p \leq n$.

a) نسمي ترتيبة لـ p عنصر من بين n عناصر E أو ترتيبة من الرتبة p لعناصر E كل ترتيب لـ p عنصر مختلف من E . ونرمز لترتيبة بـ : $(x_1, x_2, ..., x_n)$

b) عدد هذه الترتيبات هو العدد الذي نرمز له بـ : A_n^p والمعرف بمايلي :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2).......(n-p+1)}_{n\ facteurs}$$

c) نسمي تبديلة لعناصر E كل ترتيبة لـ n عنصر من بين n عناصر E

d) عدد هذه التبديلات هو $A_n^n = n(n-1)(n-2)......1 = n!$

e) نسمي تأليفة لـ p عنصر من بين n عناصر E أو تأليفة من الرتبة p لعناصر E كل جزئ مكون من p عنصر مختلف من E . ونرمز لتأليفة بـ : $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$

f) عدد هذه التأليفات هو العدد الذي نرمز له بـ : C_n^p والمعرف بمايلي :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2).......(n-p+1)}^{p\ facteurs}}{p(p-1)(p-2)....................1}$$

5) خاصيات

a) $C_n^0 = C_n^n = 1$ $\quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ $\quad C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

b) الصيغة الحدانية . $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

c) لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر .عدد أجزاء E هو 2^n .

II) الإحتمال

1) تعريف .

نعتبر المجموعة $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (كون الإمكانيات)

نقول إننا قد عرفنا احتمالا على Ω إذا وفقط إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد حقيقي p_i بحيث :

*) $0 \leq p_i \leq 1$

*) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

ونكتب $p(a_i) = p_i$. الزوج (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا .

2) احتمال حدث :

ليكن (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا و A حدثا .

احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الإبتدائية التي تكونه . يعني .

إذا كان $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ فإن $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \cdots p(a_n)$

3) خاصيات ليكن (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا .

a) ليكن A و B حدثين بحيث $A \cap B = \varnothing$ لدينا

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

b) ليكن A و B حدثين . لدينا $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) ليكن A حدثا و $\overline{A}$ الحدث المضاد لـ A ، لدينا $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

d) ليكن A_1 و A_2 و..... و A_n أحداثا منفصلة مثنى مثنى ، لدينا

$$p(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)$$

4) فرضية تساوي الإحتمالات

ليكن (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا بحيث يكون لجميع ألإمكانيات نفس الإحتمال

*) جميع الأحداث الإبتدائية لها نفس الإحتمال هو $\dfrac{1}{card(\Omega)}$

*) ليكن A حدثا . لدينا $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

ملاحظة : **a)** إذا كان لجميع الأحداث الإبتدائية نفس الإحتمال فإن

$$p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

b) إن فرضية تساوي الإحتمالات يمكن أن تظهر في النص بعبارة صريحة أو بطريقة غير مباشرة كما يلي : (نرد غير مغشوش – قطعة نقود غير مغشوشة–كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

c) إذا كانت التجربة مغشوشة يجب أولا حساب احتمال الأحداث الإبتدائية باستعمال المعطيات حول عملية الغش واستعمال الخاصية : إذا كان $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ فإن

$$p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \cdots p(a_n)$$

مثال : نرمي نرد وجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 ومغشوش بحيث الأرقام الزوجية لها نفس الإحتمال والأرقام الفردية لها نفس الإحتمال ، واحتمال رقم زوجي مضاعف احتمال رقم فردي أحسب احتمال الحدث A "الحصول على رقم مضاعف لـ 3 "

الحل : لدينا $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

*) لنحسب احتمال الأحداث الإبتدائية .

نضع $p(1) = p(3) = p(5) = x$ و $p(2) = p(4) = p(6) = 2x$

لدينا $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$

يعني $x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1$ يعني $x = \dfrac{1}{9}$ إذن

$$p(1) = p(3) = p(5) = \frac{1}{9} \text{ و } p(2) = p(4) = p(6) = \frac{2}{9}$$

*) لدينا $A = \{3, 6\}$ إذن $p(A) = p(3) + p(6) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{3}$

5) ألإحتمال الشرطي :

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A) \neq 0$ ،

احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

6) صيغة الإحتمالات المركبة

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A)\neq 0$ ،

$$p(A\cap B)=p(A)p(B/A)$$

7) صيغة الإحتمالات الكلية

a) نقول إن الأحداث A_1 و A_2 و..... و A_n تكون تجزيئا لـ Ω إذا وفقط إذا كان

(* $(\forall i\neq j):A_i\cap A_j=\varnothing$ (* $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.

b) تكون الأحداث A_1 و A_2 و..... و A_n تجزيئا لـ Ω إذا وفقط إذا كانت منفصلة مثنى مثنى وتكون هي الأحداث الممكنة .

c) صيغة الإحتمالات الكلية

ليكن A_1 و A_2 و..... و A_n أحداثا تكون تجزيئا لـ Ω. لكل حدث B لدينا :

$$p(B)=p(A_1)p(B/A_1)+\cdots+p(A_n)p(B/A_n)$$

8) ألإستقلالية

a) نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا وفقط إذا كان

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

b) يكون الحدثان A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان $p(B/A)=p(B)$

و $p(A/B)=p(A)$ يعني إذا كان تحقق أحدهما لا يؤثر على الآخر .

c) نعتبر تجربة مكونة من n اختبار مستقلة مثنى مثنى .

ليكن A حدثا احتمال تحقيقه في اختبار واحد هو $p(A)=p$

وليكن B الحدث: "الحدث A يتحقق k مرة بالضبط خلال n اختبار "

لدينا : $p(B)=C_n^k(p(A))^k(1-p(A))^{n-k}$

ملاحظة بصفة عامة من أجل حساب احتمال نتبع مايلي :

a) إذا كان لدينا السحب التآني أو الإختيار التآني نستعمل C_n^p و $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

b) إذا كانت تجربة مكونة من عدة اختبارات ، نفكك هذه التجربة إلى عدة اختبارات يكون فيها الاختيار التآني حتى نتجنب استعمال الترتيبات والتطبيقات . ونرمز لكل إمكانية بـ : $(x_1,x_2,....,x_n)$ حيث x_i نتيجة التجربة رقم i .

III) المتغير العشوائي .

1) نسمي متغير عشوائي كل تطبيق X يربط كل إمكانية من Ω بعدد حقيقي ، ونرمز للقييم التي يأخذها المتغير X بـ $X(\Omega)$.

2) ليكن X متغير عشوائي بحيث $X(\Omega)=\{x_1,x_2,....,x_n\}$

نقل إننا قد حددنا قانون احتمل X ، إذا قمنا بحساب $p(X=x_i)$ لكل $i\in\{1,2,...,n\}$ ونلخص هذه النتائج في جدول كما يلي :

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	α_1	α_2	....	α_n

3) الأمل الرياضي .

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $E(X)$ والمعرف بما يلي :

$$E(X)=x_1p(X=x_1)+x_2p(X=x_2)+\cdots+x_np(X=x_n)$$
$$=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots\cdots+x_n\alpha_n$$

4) المغايرة

المغايرة لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $V(X)$ والمعرف بما يلي :

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ حيث

$$E(X^2)=x_1^2p(X=x_1)+x_2^2p(X=x_2)+\cdots+x_n^2p(X=x_n)$$
$$x_1^2\alpha_1+x_2^2\alpha_2+\cdots\cdots+x_n^2\alpha_n$$

5) الإنحراف الطرازي .

الإنحراف الطرازي لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $\sigma(X)$ والمعرف بما يلي:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

6) دالة التجزيئ

نسمي دالة التجزيئ للمتغير العشوائي X الدالة التي نرمز لها بـ F والمعرفة بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):F(X)=p(X<x)$$

ونقول إننا قد حددنا الدالة F إذا قمنا بحساب $F(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

مثال : نعتبر الصندوق $U\left|\begin{matrix}3B\\4N\end{matrix}\right.$ نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق . ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المحصل عليها .

a) **القيم التي يأخذها المتغير** X هي :

(* $X=0$ يعني الحصول على $\{3N\}$.

(* $X=1$ يعني الحصول على $\{1B,2N\}$.

(* $X=2$ يعني الحصول على $\{2B,1N\}$.

(* $X=3$ يعني الحصول على $\{3B\}$.

إذن $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

b) **قانون احتمال** X .

(* $p(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$ (* $p(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$

(* $p(X=2)=\dfrac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$ (* $p(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{1}{35}$

c) $E(X)=0.\dfrac{4}{35}+1.\dfrac{4}{35}+2.\dfrac{18}{35}+3.\dfrac{1}{35}=\dfrac{49}{35}$

d) لدينا $E(X^2)=0^2.\dfrac{4}{35}+1^2.\dfrac{4}{35}+2^2.\dfrac{18}{35}+3^2.\dfrac{1}{35}=\dfrac{75}{35}$

إذن $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{75}{35}-(\dfrac{49}{35})^2=\dfrac{224}{352}$

e) لدينا $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{\sqrt{224}}{35}$

f) دالة التجزيئ . لنحسب $F(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

(* إذا كان $x\leq 0$ فإن $F(x)=p(X<x)=p(\varnothing)=0$

(* إذا كان $0<x\leq 1$ فإن $F(x)=p(X<x)=p(X=0)=\dfrac{4}{35}$

(* إذا كان $1<x\leq 2$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)=\frac{22}{35}$$

(* إذا كان $2<x\leq 3$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\frac{34}{35}$$

(* إذا كان $3<x$ فإن

$$F(x)=p(X<x)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$$