التعداد تذكير

I. تذكير :

A. مجموعة منتهية ـ رئيسي مجموعة :

01. تعريف :

E مجموعة و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .
إذا كان عدد عناصر المجموعة E هو n عنصر نقول أن المجموعة E هي مجموعة منتهية .
العدد n يسمى رئيسي المجموعة E . و نرمز له ب : $\text{card}E = n$.

02. أمثلة :

$E = \{a,b,c,f\}$ مجموعة منتهية و $\text{card}E = 4$ $\text{card}\varnothing = 0$. أما المجموعات $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{R}$ أو $[0,1[$ .. فهي غير منتهية.

03. مجموعتان متقادرتان: Ensembles équipotents

1- تعريف:

A و B مجموعتان منتهيتان. إذا وجد تطبيق تقابلي بين A و B نقول إن المجموعتان A و B متقادرتان . لدينا : $\text{card}A = \text{card}B$

04. خاصيات العمليات و رئيسي :

- A و B مجموعتان منفصلتان $(A \cap B = \varnothing)$. لدينا : $\text{card}A \cup B = \text{card}A + \text{card}B$.
- بصفة عامة: $\text{card}A \cup B = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}A \cap B$.
- E_1 و E_2 $\cdots E_p$ مجموعات منتهية و غير فارغة لدينا: $\text{card}E_1 \times E_2 \times \cdots E_p = \text{card}E_1 \times \text{card}E_2 \times \cdots \times \text{card}E_p$.
- حالة خاصة: $E_1 = E_2 = \cdots = E_p = E$ إذن: $\text{card}E^p = (\text{card}E)^p$.
- رئيسي متمم جزء A في E : لدينا: $C_E^A = \overline{A} = E \setminus A$ مع : $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

B. المبدأ الأساسي للتعداد :

01. مبدأ الجداء :

نعتبر تجربة تشمل p اختيارا. مع $(p \in \{1,2,3,....\})$

- إذا كان الاختيار الأول يتم ب : n_1 كيفية مختلفة.
- إذا كان الاختيار الثاني يتم ب : n_2 كيفية مختلفة.
- إذا كان الاختيار الثالث يتم ب : n_3 كيفية مختلفة
- ....
- إذا كان الاختيار الذي رقمه p يتم ب : n_p كيفية مختلفة.

فإن عدد الكيفيات التي يتم بها ال p اختيارات هو $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$

C. عدد التطبيقات من مجموعة E نحو مجموعة F (E و F منتهيتان وغير فارغتين)

01. خاصية :

A و B مجموعتان منتهيتان وغير فارغتين عدد التطبيقات من A نحو B هو : $(\text{card}B)^{\text{card}A}$

D. الترتيبات بدون تكرار:

01. تعريف :

لتكن $E=\{x_1,x_2,x_3,.....,x_n\}$ مجموعة تحتوي على n عنصر مع $n\in\mathbb{N}^*$

ليكن p عددا صحيحا طبيعيا حيث $1\le p\le n$

كل ترتيب ل p عنصر مختار من بين n بدون تكرار أي عنصر يسمى ترتيبة بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر .

أو أيضا كل عنصر $(x_1,x_2,...,x_p)$ من E^p (مع العناصر x_i مختلفة مثنى مثنى) تسمى ترتيبة بدون تكرار ل p عنصر من بين n

02. عدد الترتيبات :

1- خاصية:

عدد الترتيبات : ل p عنصر من بين n عنصر (مع $1\le p\le n$) هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له بالرمز A_n^p حيث :

$$A_n^p=\underbrace{n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}_{p}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

E. التبديلات (حالة خاصة بالنسبة لترتيبات بدون تكرار: ترتيب n عنصر بدون تكرار من بين n عنصر)

01. تعريف:

إذا رتبنا n عنصر من بين n عنصر (إي $p=n$) هذه الترتيبة تسمى تبديلة ل n عنصر .

02. خاصية:

عدد تبديلات ل n عنصر هو العدد $n!$ مع $n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$

F. التأليفات :

01. تعريف :

لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر مع $\left(n\in\{1,2,3,....\}\right)$

كل جزء من E يحتوي على p عنصر $(p\le n)$ يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر.

02. عدد التأليفات :

1- خاصية:

عدد التأليفات ل p $\left(p\in\{0,1,2,3,.....\}\right)$ عنصر من بين n عنصر هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له ب :

$$C_n^p=\frac{A_n^p}{p!}=\frac{n!}{(n-p)\times p!}=\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}^{p}}{1\times2\times3\times\cdots\times p}$$

G. حدانية نيوتن :

2- خاصية:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^* : (a+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i a^{n-i}b^i$

H. شجرة الإمكانيات :

1. مثال 1 :

لقطعة نقود وجهين : فظهر القطعة نرمز له ب: P (PILE)

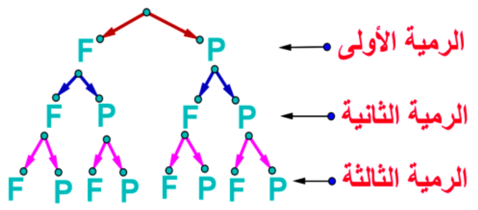
وجه القطعة الآخر نرمز له ب: F (face)

نرمي قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية (عندما نكتب أن النتيجة كانت: PPF

نقصد أن القذفة الأولى أعطت F والقذفة 2 أعطت P والقذفة 3 أعطت P).

ملحوظة: هذه التجربة يمكن تمثيلها في التمثيل التالي يسمى شجرة الإمكانيات.

شجرة الإمكانيات لقذف قطعة نقدية 3 مرات متتابعة



2. مثال 2 :

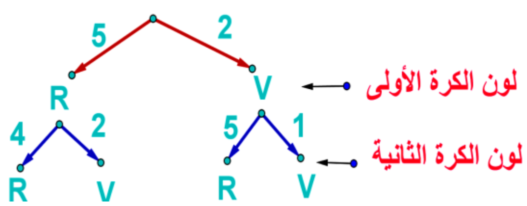
يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و2 من اللون الأخضر .

نسحب عشوائيا وبتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق

(أي بدون إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق).

ملحوظة : يمكن استعمال شجرة الإمكانات .

شجرة الإمكانيات



حساب الاحتمالات

II. تجربة عشوائية - مفردات:

01. نشاط :

- نسقط من علو 3 أمتار قطعة من حديد . نتوقع بأن القطعة ستقع على الأرض. هذه التجربة إذا تكررت ستعطي نفس النتيجة
- نقذف في الهواء قطعة نقدية مرتين ونهتم بالنتيجة المحصل عليها للوجه الأعلى في كل مرة.

هل يمكن أن نعرف النتيجة المحصل عليها مسبقا في كل محاولة؟

02. مصطلحات: تجربة عشوائية – إمكانية – حدث

- التجربة الثانية : تسمى تجربة عشوائية أو اختبار عشوائي
- النتائج المحصل عليها هي : FF و FP و PF و PP .
- إمكانية: كل نتيجة محصل عليها تسمى امكانية نرمز لها ب ω_i أي $\omega_1 = PP$ و $\omega_2 = PF$ ...
- كون: الإمكانيات تكون مجموعة تسمى كون الإمكانيات ونرمز لها ب : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. عدد عناصر Ω يسمى رئيسي Ω

و يرمز له ب: $card\Omega = 4$

- حدث : كل جزء A من المجموعة Ω يسمى حدث

مثال الحدث: $A = \{PF, FP\}$ أو $A = \{PP\}$ أو $A = \{PP, PF, FP, FF\} = \Omega$ أو $A = \varnothing$

- حدث أولي : كل جزء متكون من إمكانية 1 فقط يسمى حدث أولي أو حدث ابتدائي. مثال : $A = \{PP\}$ أو $A = \{FP\}$
- تعبير عن حدث: الأحداث يمكن التعبير عنها بجُمل. مثال: $A = \{PF, FP\}$ "نتيجتا القذفة الأول و الثانية مختلفتان "

تحقيق الحدث A _ أحداث خاصة:

إذا قمنا بالتجربة السابقة وحصلنا على FP نقول بان الحدث $A = \{PF, FP\}$ قد تحقق أو الحدث A قد وقع .

Ω كون الإمكانيات

- حدث أولي: كل جزء يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدث أولي أو حدث ابتدائي مثال : $A = \{PP\}$ أو $A = \{FP\}$ ..
- الحدث الأكيد: $A = \{PP, PF, FP, FF\} = \Omega$ يسمى الحدث الأكيد لإن أي نتيجة لتجربة تنتمي لهذا الجزء (أي الجزء Ω يتحقق دائما).
- الحدث المستحيل: $A = \varnothing$ يسمى الحدث المستحيل لإن أي نتيجة تقع بعد التجربة و لا تنتمي لهذا الجزء.

- انسجام حدثين: حدثين A و B غير منسجمين يعني أن: $A\cap B=\varnothing$.
  مثال : $A=\{PF,FP\}$ و $B=\{FF,PP\}$ لأن $A\cap B=\varnothing$
- الحدث المضاد :
  Ω كون الإمكانيات. نقول إن الحدثين A و B متضادان يكافئ أن: $A\cap B=\varnothing$ و $A\cup B=\Omega$، نكتب: $B=\overline{A}$ أو $A=\overline{B}$
  خاصية: $\mathrm{card}A+\mathrm{card}\overline{A}=\mathrm{card}\Omega$.

03. أمثلة :

1. بالنسبة لتجربة: $A=\{PF,FP,PP\}$ و $B=\{FF\}$ حدثان متضادان لإن : $A\cap B=\varnothing$ و $A\cup B=\Omega$ إذن: $B=\overline{A}$
2. يحتوي صندوق: على 3 كرات من اللون أبيض و كرتين من اللون أسود و كرة من اللون أحمر.
   نسحب من الصندوق تانيا كرتين (دفعة واحدة) .
   1) ما هو عدد الإمكانيات ؟ (أو ما هو عدد السحبات :) (أو أوجد $\mathrm{card}\Omega$)
   2) لنعتبر الحدث: B " سحب على الأقل كرة واحدة بيضاء " .ما هو عدد الإمكانيات التي تحقق B ؟ أو ما هو $\mathrm{card}B$ ؟
   3) عبر عن الحدث المضاد ل A بجملة. ما هو عدد الإمكانات التي تحقق الحدث $\overline{A}$ ؟ (أي $\mathrm{card}\overline{A}$) .

04. مجموعة تجزيئ :

مجموعة E تسمى مجموعة تجزيئ ل Ω يعني:
E متكونة من أجزاء الكون Ω و هذه الأجزاء منفصلة مثنى مثنى و اتحاد هذه الأجزاء هو الكون Ω.

- مثال: $E=\{\{PP\};\{PF,FP\}.\{FF\}\}$ هي تجزء ل Ω

III. الفضاءات الاحتمالية المنتهية:

A. احتمال تحقق إمكانية (أو حدث أولي) :

01. نشاط 1 :

نرمي في الهواء قطعة نقدية مرتين متتاليتين عندما نكتب أن النتيجة (أو الإمكانية) كانت: PF نقصد أن القذفة الأولى أعطت P والقذفة 2 أعطت F. بعد إعادة التجربة 1000 مرة حصلنا على النتائج التالية .

الامكانية	PP	PF	FP	FF
عدد المرات التي تحققت الامكانية	230	270	260	240

1. ما هو الحدث الذي له أكبر نسبة حظ لكي يتحقق؟
   نقول إن احتمال الحصول على الامكانية PF هي $\frac{270}{1000}$ و نكتب $p(\{PF\})=0,27$
2. ما هو الحدث الذي له أضعف نسبة حظ لكي يتحقق؟
   نقول إن احتمال الحصول على الامكانية PP هو $\frac{230}{1000}$ و نكتب $p(\{PP\})=0,23$

02. نشاط 2 :

نرمي في الهواء نردا مكعبا له 6 أوجه تحمل على التوالي الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 .

1) ماهو كون الإمكانيات؟
2) نعتبر الأحداث التالية:
   A " نحصل على رقم a حيث $|a|<2$ "
   B " نحصل على رقم a حيث a يقبل القسمة على 3 "

C " نحصل على رقم a يكون زوجي "

أ- أكتب بالتفصيل الأحداث التالية : A ؛ B ؛ C .

ب- ما هو الحدث الذي له أكبر نسبة حظ لكي يتحقق. ماهي نسبة حظه؟.

ت- ما هو الحدث الذي له أضعف نسبة حظ أن يتحقق. أوجد نسبة حظ الحصول على الحدث A .

ث- أوجد نسبة احتمال الحصول على حدث أولي.

03. احتمال على مجموعة:

1. تعريف:

لتكن $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ مجموعة منتهية كون الإمكانيات

- إذا كانت صورة كل عنصر ω_i من Ω بعدد p_i ينتمي إلى $[0,1]$ أي $(\omega_i \mapsto p_i)$ ؛ وكان $p_1+p_2+p_3+\cdots p_n=1$
- نقول بأننا عرفنا احتمالا p على الكون Ω.
- نقول إن احتمال الحدث الابتدائي $\{\omega_i\}$ هو العدد p_i ونكتب : $p(\{\omega_i\})=p_i$.
- الزوج $(\Omega;p)$ يسمى فضاءا احتماليا منتهيا.

2. تعريف: بطريقة أخرى

لتكن $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ مجموعة منتهية كون إمكانيات تجربة عشوائية .

- عندما نعيد تجربة N مرة حيث n_i مرة تتحقق فيه الامكانية ω_i . العدد $\frac{n_i}{N}$ يسمى احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ (أو الامكانية ω_i) و نكتب $p_i=p(\{\omega_i\})=\frac{n_i}{N}$.
- احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تنتمي إلى A ونكتب: $p(A)$.

B. احتمال حدث :

01. نشاط:

نأخذ النشاط السابق المتعلق برمي في الهواء قطعة نقدية مرتين متتاليتين

3. لنعتبر الحدث $A=\{PP;FF\}$ نقول إن احتمال الحصول على الحدث A هو $\frac{500}{1000}=\frac{230}{1000}+\frac{270}{1000}$ و نكتب

$$p(A)=p(\{PP,PF\})=p(\{PP\})+p(\{PF\})=0,5$$

1. احتمال حدث :

2. تعريف :

احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تنتمي إلى A و نكتب : $p(A)$.

أو أيضا $A=\{\omega_{i1},\omega_{i2},\omega_{i3},....,\omega_{ip}\}$ فإن :

$$p(A)=p(\{\omega_{i1},\omega_{i2},\omega_{i3},..,\omega_{ip}\})=p(\{\omega_{i1}\})+p(\{\omega_{i2}\})+p(\{\omega_{i3}\})+...+p(\{\omega_{ip}\})$$

3. مثال: $A=\{1,2,4\}$ لدينا:

$$p(A)=p(\{1,2,4\})=p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{4\}) .$$

4. خاصيات :

02. خاصيات :

- ليكن A و B حدثين من كون الإمكانيات من Ω.
- $p(\varnothing)=0$ و $p(\Omega)=1$ و $\forall A\in\Omega : 0\le p(A)\le 1$.
- $A\cap B=\varnothing$ (حدثان غير منسجمين) لدينا : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- حالة عامة : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- $p(\overline{A})=1-p(A)$

03. برهان :

- لدينا : $B\cup\varnothing=B$ ومنه : $p(B\cup\varnothing)=p(B)$ أي $p(B)+p(\varnothing)=p(B)$ ومنه : $\cancel{p}(B)+p(\varnothing)=\cancel{p}(B)$ و بالتالي : $p(\varnothing)=0$.
خلاصة : $p(\varnothing)=0$
- $p(\Omega)=1$ صحيحة طبقا للتعريف .
- نعتبر : $A\cap B=\varnothing$ مع $A=\{x_1,x_1,\dots\dots,x_d\}$ و $B=\{y_1,y_1,\dots\dots,y_h\}$
ومنه : $A\bigcup B=A=\{x_1,x_1,\dots\dots,x_d,y_1,y_1,\dots\dots,y_h\}$.
- إذن :

$$p(A\bigcup B)=p(\{x_1,x_2,\dots\dots,x_d,y_1,y_2,\dots\dots,y_h\})$$
$$=\underbrace{p(\{x_1\})+p(\{x_2\})+\dots+p(\{x_d\})}_{p(A)}+\underbrace{p(\{y_1\})+p(\{y_2\})\dots+p(\{y_h\})}_{p(B)}$$

خلاصة : $A\cap B=\varnothing$ إذن $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

- نبين أن : $p(\overline{A})=1-p(A)$.
نعلم أن : $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$ و $A\bigcup\overline{A}=\Omega$ ومنه : $p(A\bigcup\overline{A})=p(\Omega)\Rightarrow p(A)+p(\overline{A})=1$
$$\Rightarrow p(\overline{A})=1-p(A)$$
خلاصة : $p(\overline{A})=1-p(A)$

4. لنعتبر الحدث $A=\{PP;FF\}$ نقول إن احتمال الحصول على الحدث A هو $\frac{500}{1000}=\frac{230}{1000}+\frac{270}{1000}$ و نكتب $p(\{PP,PF\})=0,5$

IV. فرضية تساوي الاحتمالات:

01. خاصية:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية (اي الأولية) متساوية الاحتمال في تجربة حيث كون امكانيتها Ω .
(أي $p(\{\omega_1\})=p(\{\omega_2\})=p(\{\omega_3\})=\dots\dots\dots=p(\{\omega_n\})$) يصبح احتمال الحدث A من Ω هو $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}$.

02. تمرين:

امتحان شفوي في الرياضيات يحتوي على: 5 أسئلة في الهندسة و 4 أسئلة في الجبر و 3 أسئلة في التحليل. الطالب يختار 3 أسئلة من بين هذه الأسئلة . نعتبر الأحداث التالية:

A " الأسئلة 3 كلها في الهندسة "
B " سؤال واحد فقط في كل مادة "
C " سؤال على الأقل في الهندسة "

1) أ - ما هو عدد السحبات الممكنة لهذا الطالب إذا كان سحب الأسئلة في آن واحد .

ب- أحسب احتمالات الأحداث : A و B و C إذا كان سحب الأسئلة في آن واحد .

2) نفس الأسئلة إذا كان السحب بالتتابع وبدون إحلال للأسئلة .

3) نفس الأسئلة إذا كان السحب بالتتابع و بإحلال للأسئلة .

جواب : لبعض الأسئلة

1)

أ- عدد السحبات الممكنة :

سحب 3 أسئلة في آن واحد من بين 12 سؤال يمثل تأليفة ل 3 من بين 12 و بالتالي عدد السحبات الممكنة هو عدد التأليفات ل 3 من بين 12

ومنه : $\text{card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12\times11\times10}{1\times2\times3} = 220$.

ب - احتمال الأحداث:

- احتمال A :

نحسب : $\text{card}A$:

الأسئلة 3 كلها في الهندسة أي عدد التأليفات ل 3 من بين 5 (الأسئلة في الهندسة) ومنه : $\text{card}A = C_5^3 = 10$

و بالتالي : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$.

- احتمال B :

نحسب : $\text{card}B$:

سؤال واحد فقط في كل مادة أي سؤال 1 في الهندسة $\left(C_5^1\right)$ و سؤال 1 في الجبر $\left(C_4^1\right)$ و سؤال 1 في التحليل $\left(C_3^1\right)$ ومنه :

$\text{card}B = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$

و بالتالي : $p(A) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

- احتمال C : حاول أنت تعطي الجواب .

2) السحب بالتتابع وبدون إحلال للأسئلة .

أ- عدد السحبات الممكنة :

سحب 3 أسئلة بالتتابع و بدون إحلال من بين 12 سؤال يمثل ترتيبة بدون تكرار ل 3 من بين 12 و بالتالي عدد السحبات الممكنة هو عدد الترتيبات ل 3 من بين 12 ومنه : $\text{card}\Omega = A_{12}^3 = 12\times11\times10 = 1320$.

- احتمال A :

نحسب : $\text{card}A$:

الأسئلة 3 كلها في الهندسة أي عدد الترتيبات بدون تكرار ل 3 من بين 5 (الأسئلة في الهندسة) ومنه : $\text{card}A = A_5^3 = 60$

و بالتالي : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}$.

طريق 2 :

السؤال 1 في الهندسة احتماله هو $\frac{5}{12}$. السؤال 2 في الهندسة احتماله هو $\frac{4}{11}$. السؤال 3 في الهندسة احتماله هو $\frac{3}{10}$.

ومنه $p(A) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10} = \frac{1}{22}$. (هناك طريقة 3 استعمال الشجرة للإجابة عن هذ الأسئلة :

V. الاحتمال الشرطي - استقلال حدثين –الاختبارات المتكررة:

A. الاحتمال الشرطي :

01. تعريف:

ليكن A و B حدثين لنفس التجربة Ω حيث: $p(A) \neq 0$.

احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ و الذي نرمز له ب: $p_A(B)$ أو $p\left(B/A\right)$

02. مثال:

يحتوي صندوق: على 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء.
سحبنا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من هذا الصندوق .
احسب احتمال الأحداث التالية:

B_1 " الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء"

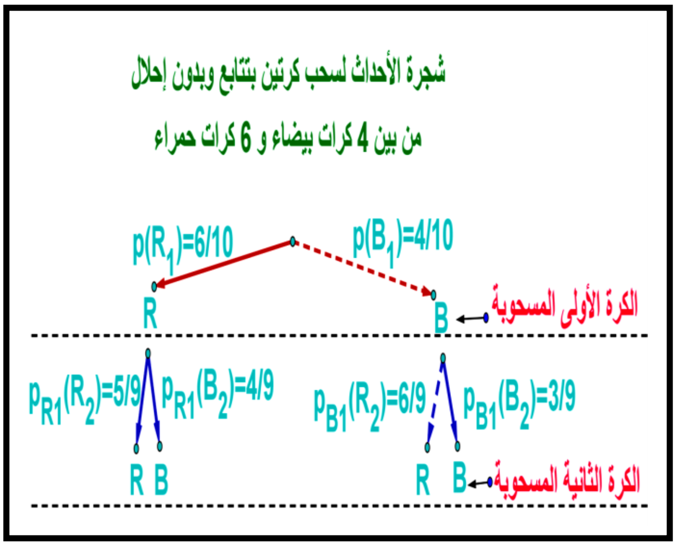
R_1 " الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء"

C " الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "

D " الكرة المسحوبة في المرة الثانية بيضاء علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء "

E " الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء و الكرة الثانية حمراء"

R_2 " الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء "



جواب:
حسب شجرة الأحداث ، لدينا:

- $p(R_1)=\frac{6}{10}$ و $p(B_1)=\frac{4}{10}$
- $p(C)=p_{B_1}(R_2)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
- $p(D)=p_{R_1}(B_2)=\frac{4}{9}$
- $p(E)=p(B_1\cap R_2)=p(B_1)\times p_{B_1}(R_2)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}$ (وهو جداء العددين اللذين يمثلان السهمين المتقطعين)
- $p(R_2)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$

b طريقة ثانية لتوضيح الجواب الأول فقط:
نحسب : $p(B_1)$:

الكرة الأولى بيضاء احتمالها هو: $\frac{4}{10}$. الكرة الثانية غير مهم لونها (كيف ما كان لونها) احتمالها هو $\frac{9}{9}$

و منه: $p(B_1)=\frac{4}{10}\times\frac{9}{9}=\frac{4}{10}$.

03. صيغ الاحتمالات المركبة :

1. خاصية :

ليكن $(\Omega ;p)$ فضاء احتمالي منتهي . A و B حدثان لنفس التجربة Ω حيث: $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$.
الكتابة : $p(A\cap B)=p(A)p_A(B)=p(B)p_B(A)$ تسمى صيغة الاحتمالات المركبة .

04. الاحتمالات الكلية :

1. خاصية :

ليكن $(\Omega ;p)$ فضاء احتمالي منتهي . $A_1 , A_2 , A_3 ,....A_n$ أحداث من Ω تكون تجزيئي ل Ω
(أي $\forall i,j / i\neq j : A_i\cap A_j=\varnothing$ و $\bigcup_{k=1}^{k=n}A_k=A_1\cup A_2\cup A_3\cup ....\cup A_n=\Omega$) . احتمال حدث B من Ω هو :

$$p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+p(A_3)p_{A_3}(B)+....+p(A_n)p_{A_n}(B)$$

05. مثال :

B. استقلالية حدثين:

01. تعريف :

نقول بأن حدثين A و B مستقلان إذا كان: $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ أو أيضا: $p_A(B)=p(B)$

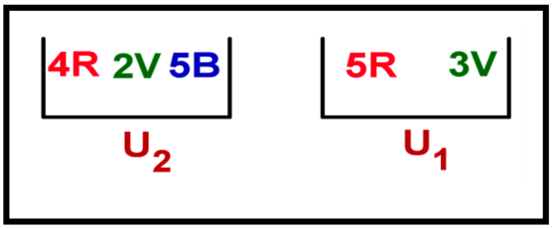
02. ملحوظة :

A و B حدثان مستقلان يعني أن تحقيق أحدهما لا يتأثر بتحقيق أو عدم تحقيق الأخر .

03. أمثلة:

مثال 1 :

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 حيث : R = لون أحمر، V = لون أخضر، B = لون أزرق.



نسحب كرة من الصندوق U_1 وكرة من الصندوق U_2.

التجربة متكونة من اختبارين مستقلين

$A_{R1;V2}$ " سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 و كرة خضراء من الصندوق U_2 "

نعتبر الأحدث التالية :

R_1 " سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 "

إذن: $p(R_1)=\frac{5}{8}$

V_2 " سحب كرة خضراء من الصندوق U_2 "

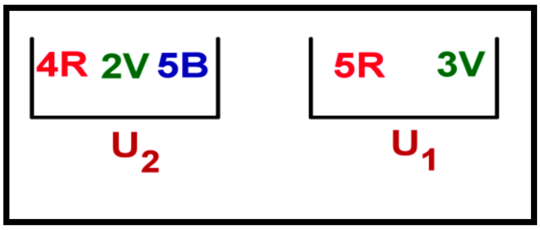
إذن: $p(V_2)=\frac{2}{11}$

$A_{R1;V2}$ " سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 و كرة خضراء من الصندوق U_2 "

الحدثين R_1 و V_2 مستقلين.(لإن سحب كرة من أحد الصندوقين احتمالها غير مرتبط بنتائج الاختبار لصندوق الأخر.

إذن: $p(A_{R1;V2})=p(R1)\times p(V2)=\frac{5}{8}\times\frac{2}{11}=\frac{5}{44}$.

مثال 2 :



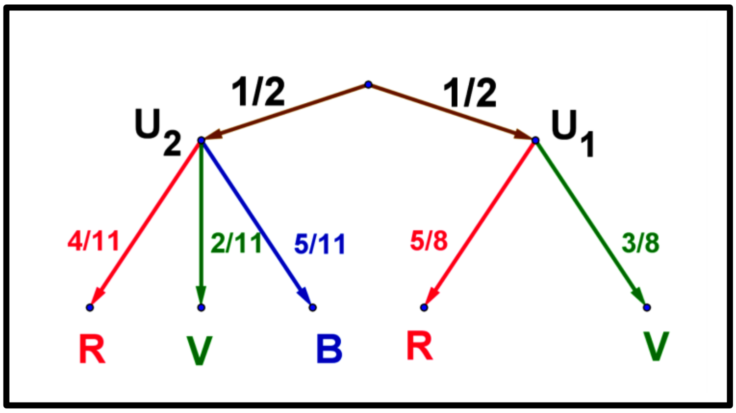
نعتبر صندوقين U_1 و U_2 حيث : R = لون أحمر، V = لون أخضر، B = لون أزرق.

نختار عشوائيا أحد الصندوقين ثم نسحب منه بيدق واحدة .

لنعتبر الحدث V " الحصول على بيدق أخضر "

1. أنشئ شجرة الإمكانيات و الاحتمالات للتجربة .
2. أحسب : $p(V)$.
3. ما هو احتمال :

B " اختيار الصندوق U_1 علما اننا حصلنا على بيدق أخضر "



جواب :

1. ننشئ شجرة : (أنظر الشكل أمامه)
2. نحسب : $p(A)$.

V " سحب بيدق أخضر "

U_1 " اختيار الصندوق U_1 "

U_2 " اختيار الصندوق U_2 "

V "البيدق المسحوب لونه أخضر " أو أيضا " اختيار الصندوق U_1 و السحب يعطي بيدق أخضر أو اختيار الصندوق U_2 و السحب يعطي بيدق أخضر "

ومنه : نعبر عن V بما يلي : $V=(U_1\cap V)\cup(U_2\cap V)$

إذن :

$$\begin{aligned}p(V)&=P\left((U_1\cap V)\cup(U_2\cap V)\right)\\&=p(U_1\cap V)+p(U_2\cap V)\\&=p(U_1)p_{U_1}(V)+p(U_2)p_{U_2}(V)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}\\&=\frac{49}{176}\end{aligned}$$

خلاصة : $p(V)=\frac{49}{176}$.

3. حساب : $p(B)$.

يمكن كتابة : $p(B)$ على الشكل التالي : $p(B)=p_V(U_2)=p(U_2/V)=\frac{p(U_2\cap V)}{p(V)}=\frac{p(U_2)\times p_{U_2}(V)}{p(V)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}}{\frac{49}{176}}=\frac{16}{49}$

C. الاختبارات المتكررة:

01. نشاط:

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6.
نسحب عشوائيا و تآنيا كرتين من الصندوق .
ما هو احتمال الحدث A " الحصول على رقمين زوجيين"؟
نعيد سحب عشوائي و تآنيا كرتين من الصندوق ثلاث مرات متتابعة و نهتم كم من مرة تحقق الحدث A بعد إعادة اختبار 3 مرات متتابعة وما هو احتمالها .

جواب:

نحسب $p=p(A)$:

- نحسب $card\Omega$ (عدد سحبات الممكنة)

سحب تآنيا كرتين من بين 6 كرات تحمل هو تأليفة لـ2 من بين 6 إذن عدد السحبات الممكنة هو : $card\Omega=C_6^2=15$

- نحسب: $cardA$

سحب تآنيا كرتين من بين 3 كرات تحمل الأرقام زوجية هو تأليفة ل 2 من بين 3 إذن: $cardA=C_3^2=3$.

- احتمال A :

$$p=p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

02. مفردات :

نقول إن الاختبار تكرر 3 مرات . أما الحدث A تحقق k مرة مع $k\in\{0,1,2,3\}$

03. خاصية:

احتمال تحقق k مرة بالضبط الحدث A بعد تكرار الاختبار n مرة متتالية وفي نفس الظروف هو: $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
مع $k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$ و $p=p(A)$.

04. مثال :

نأخذ المثال السابق:

نحسب $p_{k=2}(A)$ الحدث A تحقق مرتين بعد إعادة الإختبار 3 مرات متتالية: لدينا حسب الخاصية:

$$p_{k=2}(A)=C_3^2\times[p(A)]^2\times[1-p(A)]^{3-1}=3\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)$$

VI. المتغير العشوائي – قانون احتمالي :

A. متغير عشوائي

01. نشاط:

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6. نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق .

حدد عدد المرات التي نحصل فيها على رقم فردي بعد كل سحبة ؟

جواب : عدد المرات التي نحصل على عدد فردي هي :0 أو 1 أو 2.

02. مفردات:

العلاقة التي تربط كل عنصر ω_i (أي كل حدث أولي) من Ω بعدد الأرقام الفردية التي أعطتها السحبة ω_i تسمى متغير عشوائي

و نرمز له ب : X أو Y أو Z ...

و هذه العلاقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$X:\ \Omega\to\mathbb{R}$$
$$\omega\to X(\omega)=x_i$$

- الأعداد : 0، 1 ، 2 : تسمى قيم المتغير العشوائي X و نرمز لها ب: $x_1=0$ و $x_2=1$ و $x_3=2$ (بصفة عامة x_i) وهي تكون مجموعة نرمز لها ب: $X(\Omega)=\{0,1,2\}$
- بصفة عامة $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$.
- جميع الأحداث الأولية ω حيث $X(\omega)=x_i$ تكون مجموعة ضمن Ω إذن هي حدث ونرمز لهذا الحدث ب : $(X=x_i)$.
- إذن : $(X=x_i)=\{\omega\in\Omega/X(\omega)=x_i\}$.
- الكتابة : $p(X=x_i)$ تعني : احتمال الحصول على الحدث $(X=x_i)$.

B. قانون احتمال عشوائي:

01. نشاط: نأخذ النشاط السابق: لنعتبر الأحداث التالية:

A "ليس هناك رقم فردي " . نرمز له ب: $X=0$ ومنه : احتمال الحدث A هو: $p(A)=p(X=0)$

B "نحصل فقط على رقم واحد يكون فردي " . نرمز له ب: $X=1$ ومنه احتمال الحدث B هو: $p(B)=p(X=1)$

C "نحصل فقط على رقمين فرديين " . نرمز له ب: $X=2$.

ومنه احتمال الحدث C هو: $p(C)=p(X=2)$

02. مفردات:

حساب جميع الاحتمالات : $p(X=x_i)$ لكل x_i من $X(\Omega)$ يسمى قانون احتمال للمتغير العشوائي X .

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في جدول.

03. مثال: نأخذ النشاط السابق:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$p(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$	$p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$	$p(X=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$

VII. الأمل الرياضي – المغايرة – الانحراف الطرازي:

01. تعاريف:

ليكن $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X . و $p_i=p(X=x_i)$ احتمالات قيم المتغير العشوائي X .

1. العدد : $\sum_{i=1}^{i=n} p(X=x_i)=x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+\cdots+x_n\times p(X=x_n)$. يسمى الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ويرمز له ب : $E(X)$ أو أيضا ب : $\overline{X}$.
2. العدد :
$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\overline{X})\times p(X=x_i)$$
$$=(x_1)^2\times p(X=x_1)+(x_2)^2\times p(X=x_2)+\cdots+(x_n)^2\times p(X=x_n)-[E(X)]^2$$
3. يسمى المغايرة للمتغير العشوائي X . (ملحوظة: $V(X)\geq 0$ (عدد موجب))
4. العدد : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ يسمى الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X .
5. لكل x $\mathbb{R}$ نرمز للحدث $\{\omega\in\Omega / X(\omega)<x\}$ ب : $(X<x)$
6. الدالة : F المعرفة ب: $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ ؛ $x\to F(x)=p(X<x)$ حيث :

$\forall x\in[x_i,x_{i+1}[\ : p(X<x)=p(X=x_1)+p(X=x_2)+\cdots+p(X=x_i)$ تسمى دالة التجزيئ للمتغير العشوائي X .

$x\in$	$]-\infty,x_1]$	$]x_1,x_2]$	$]x_2,x_3]$	...	$]x_{n-1},x_n]$	$]x_n,+\infty[$
$F(x)=$	0	$p(X=x_1)$	$p(X=x_1)+p(X=x_2)$	...	$p(X=x_1)+p(X=x_2)+\cdots+p(X=x_{n-1})$	1

02. ملحوظة : دالة التجزيئ خارج المقرر

03. مثال:

نأخذ المثال السابق:

1. أعط: قانون احتمال .
2. الأمل الرياضي .
3. المغايرة .
4. الانحراف الطرازي .

جواب: لنعتبر الجدول الآتي:

قيم المتغير العشوائي	x_i	0	1	2	المجموع
قانون احتمال X	$p(X=x_i)$	$p(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$	$p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$	$p(X=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$	1
الأمل الرياضي $E(X)$	$x_i\times p(X=x_i)$	$0\times\frac{1}{5}$	$1\times\frac{3}{5}$	$2\times\frac{1}{5}$	$E(X)=\frac{0+3+2}{5}=1$
لحساب المغايرة $V(X)$	$x_i^2\times p(X=x_i)$	$0^2\times\frac{1}{5}$	$1^2\times\frac{3}{5}$	$2^2\times\frac{1}{5}$	$\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\times p(X=x_i)=\frac{0+3+4}{5}=\frac{7}{5}$

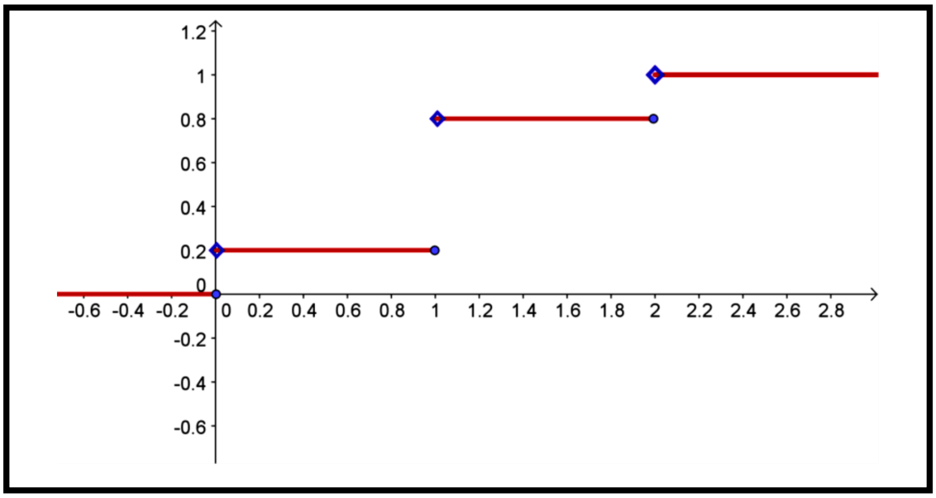
حسب الجدول :

*الأمل الرياضي هو $E(X)=1$

* المغايرة هي: $V(X)=\frac{7}{5}-(E(X))^2=\frac{7}{5}-1^2=\frac{2}{5}$

* الانحراف الطرازي هو: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

3. التمثيل المبياني لدالة التجزيء



VIII. التوزيع الحداني أو المتغير الحداني :

01. تعريف و خاصيات :

ليكن p هو احتمال الحدث A خلال تجربة واحدة.
نعيد التجريبية n مرة (في نفس الظروف) . ليكن X المتغير العشوائي الذي يهتم بعدد المرات التي نحصل فيها على الحدث A بعد n تجربة .
لدينا :

- $X(\Omega)=\{0,1,2,...,n\}$.
- $\forall k\in X(\Omega):p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.
- المتغير العشوائي X يسمى قانون حداني واسطيه n و p .
- الأمل الرياضي هو : $E(X)=np$.
- المغايرة هي : $V(X)=n\times p\times(1-p)$.