

الثانية بكالوريا علوم تجريبية • تصحيح الامتحان التجريبي 27 / أبريل / 2006 • الأستاذ : الحيان •

إذن :  $z_2 = -2 - i(1 - \sqrt{3}) - z_1 = -2 - i(1 - \sqrt{3}) + 1 + i = \boxed{-1 + i\sqrt{3}}$

2. لدينا :  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$  ؛ إذن :

$$z_1 = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + \pi \right] = \left[ \sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right]$$

ولدينا :  $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$  ؛ إذن :

$$z_2 = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left[ 2, \pi - \frac{\pi}{3} \right] = \left[ 2, \frac{2\pi}{3} \right]$$

3. الشكل المثلثي ل Z هو :  $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[ \sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right]}{\left[ 2, \frac{2\pi}{3} \right]} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right] = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{12} \right]$

والشكل الجبري ل Z هو :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 - i}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-1 - i)(-1 - i\sqrt{3})}{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

ومنه نستنتج أن :  $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases}$  ؛ إذن :  $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \end{cases}$

التمرين الثالث :

في الفضاء (E) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ؛ نعتبر :

النقطتين A (2, -1, 0) و B (3, 0, 1) ؛

والمستويين (P) :  $x + y + z - 1 = 0$  و (Q) :  $2x + y + 2z + 3 = 0$  .

1. ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (Q) .

لدينا :  $\vec{u}(2, 1, 2)$  متجهة منظمية على المستوى (Q) ولدينا  $(\Delta) \perp (Q)$  ؛ إذن :

التمرين الأول :

1. لدينا :  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

$$I = 1 - [Arc \tan x]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي فإن :  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$

2. نضع :  $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$  ؛ إذن :  $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$

لدينا u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال  $[0, \ln 2]$  ؛ و u' و v' دالتين متصلتين على المجال  $[0, \ln 2]$  . حسب المكاملة بالأجزاء ؛ لدينا :

$$J = \int_0^{\ln 2} u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} u(x)v'(x) dx = [xe^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx$$

$$J = \ln(2)e^{\ln(2)} - 0 - [e^x]_0^{\ln 2} = 2\ln(2) - (e^{\ln(2)} - 1) = 2\ln(2) - 1$$

وبالتالي فإن :  $J = \int_0^{\ln 2} xe^x dx = 2\ln(2) - 1$

التمرين الثاني :

نعتبر في المجموعة C ؛ المعادلة :

$$(E) : z^2 + [2 + i(1 - \sqrt{3})]z + 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) = 0$$

1. لدينا :  $(-1 - i)^2 + [2 + i(1 - \sqrt{3})](-1 - i) + 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$

$$= 2i - 2 - 2i - i(1 - \sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) = 0$$

إذن :  $z_1 = \boxed{-1 - i}$  حل للمعادلة (E) . ليكن  $z_2$  الحل الآخر للمعادلة (E) .

نعلم أن :  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2 + i(1 - \sqrt{3})}{1} = -2 - i(1 - \sqrt{3})$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = -t \\ y-5 = 0 \\ z-1 = t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5-t \\ y = 5 \\ z = 1+t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم (D)؛

(D) هو تقاطع المستويين (P) و (Q)

3. ليكن (R) المستوى المار من النقطة B والعمودي على المستويين (P) و (Q)

إذن (R) عمودي على المستقيم (D)؛ وبما أن  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, 0, 1)$  متجهة

موجهة للمستقيم (D)؛ فإنها متجهة منظمة على المستوى (R).

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من الفضاء (E). لدينا :

$$M \in (R) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3) + (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + z + 2 = 0$$

وبالتالي فإن معادلة ديكارتية للمستوى (R) هي :  $-x + z + 2 = 0$ .

4. لتكن (S) الفلكة التي مركزها  $\Omega(1, 1, 3)$  وشعاعها  $R = 3$ .

أ- لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من الفضاء (E). لدينا :

$$M \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$$

ب- لدينا :  $d(\Omega, (P)) = \frac{|1+1+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} < R$  ؛ إذن :

المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة  $\mathcal{C}(\omega, r)$  التي :

$\vec{u}$  متجهة موجهة للمستقيم (Δ). لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من الفضاء (E)؛

لدينا :  $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتان

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2t \\ y+1 = t \\ z-0 = 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

2. لدينا  $\vec{u}(2, 1, 2)$  متجهة منظمة على المستوى (Q) و  $\vec{v}(1, 1, 1)$  متجهة

منظمة على المستوى (P)؛ ولدينا :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{k} \neq \vec{0}$$

إذن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان غير مستقيمتان؛ ومنه فإن المستويين (P) و (Q)

متقاطعان وفق مستقيم (D) موجه بالمتجهة  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, 0, 1)$ ؛ معادلتين

$$\begin{cases} x+y+z-1 = 0 \\ 2x+y+2z+3 = 0 \end{cases} \text{ : ديكارتيتين له هما :}$$

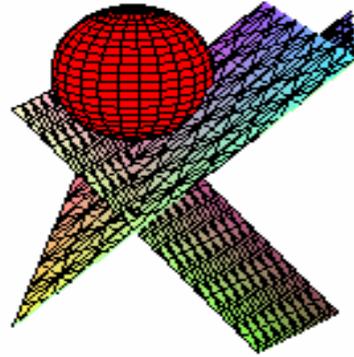
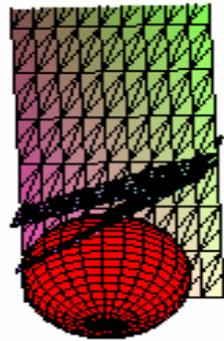
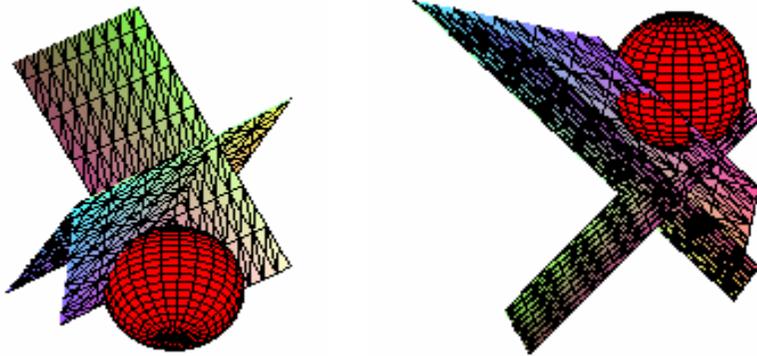
من أجل  $z=1$  (مثلا)؛ نجد :  $\begin{cases} x+y = 0 \\ 2x+y+5 = 0 \end{cases}$  . إذن :

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x-x+5 = 0 \end{cases} \text{ ؛ ومنه فإن : } \begin{cases} y = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

وبالتالي فإن النقطة  $C(-5, 5, 1)$  تنتمي إلى المستقيم (D).

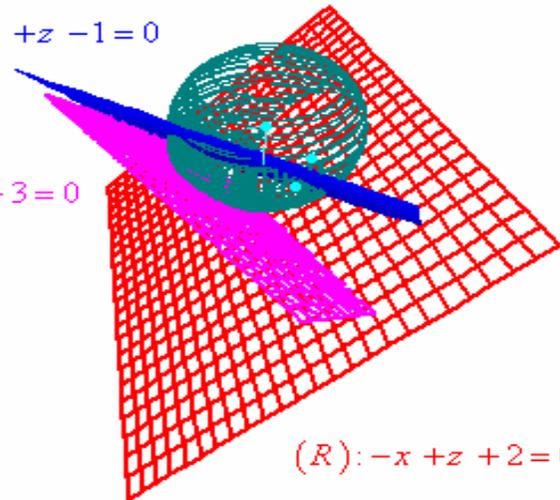
لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من الفضاء (E)؛ لدينا :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$$
 و  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  مستقيمتان
$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{CM} = t\vec{u} \wedge \vec{v}$$



(P):  $x + y + z - 1 = 0$

(Q):  $2x + y + 2z + 3 = 0$



(R):  $-x + z + 2 = 0$

شعاعها :  $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$

مركزها  $\omega(x, y, z)$  هو المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P):

لدينا  $\overline{AB} (1,1,1)$  متجهة منظمية على المستوى (P) ؛  $\langle \overline{AB} \perp (P) \rangle$

و  $A(2, -1, 0) \in (P)$  ؛ إذن  $\omega = A$  هو مركز الدائرة  $\mathcal{C}(\omega, r)$ .

وبالتالي فإن :  $(S) \cap (P) = \mathcal{C}\left(A, \frac{\sqrt{33}}{3}\right)$  حيث  $A(2, -1, 0)$

نعطي الشكل النهائي بواسطة البرنامجين Maple و winplot كما يلي :

with(geometry) :

with(geom3d) :

plane(P,x+y+z=1,[x,y,z]) :

plane(Q,2\*x+y+2\*z=-3,[x,y,z]) :

plane(R,-x+z=-2,[x,y,z]) :

line(D,[P,Q]) :

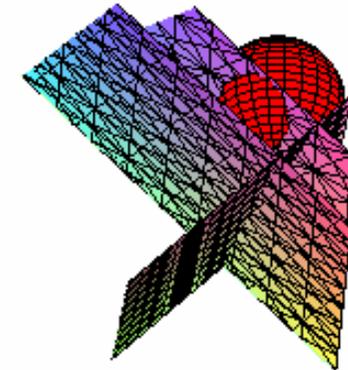
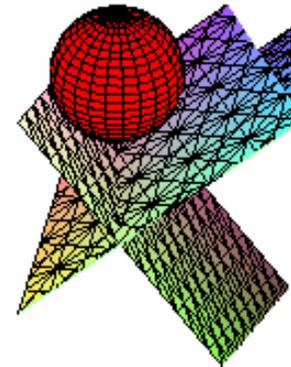
\_EnvXName :=x : \_EnvYName :=y : \_EnvZName :=z :

sphere(S,(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9,[x,y,z]) ;

intersection(D,P,Q) ;

ArePerpendicular(P,R) ; ArePerpendicular(Q,R) ;

draw([P,Q,R ,D,S(color=red)]);



$$. f(2) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + \ln(3-x) = 2 + \ln(1) = 2 \text{ و}$$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$  فإن  $f$  متصلة في النقطة 2.

$$. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + \ln(3-x) - 2}{x - 2} \quad \text{أ- لدينا :}$$

نضع  $t = 3 - x$  . إذن :  $x \rightarrow 2^- \Leftrightarrow t \rightarrow 1^+$  و منه فإن :

$$. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1 - t + \ln(t)}{1 - t} = \lim_{t \rightarrow 1^+} 1 + \frac{\ln(t)}{1 - t} = 1 - 1 = \boxed{0}$$

إذن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 ولدينا :  $f'_g(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \quad \text{لدينا :}$$

$$. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \boxed{+\infty}$$

إذن  $f$  غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 2 .

ب- لدينا :  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة 2 و  $f'_g(2) = 0$  . إذن

$\mathcal{E}_f$  يقبل نصف مماس على اليسار في النقطة التي أفصولها 2 معادلته :

$$(f'_g(2) = 0 \text{ و } f(2) = 2) . (T_g) \quad \begin{cases} y = 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} y = f'_g(2)(x - 2) + f(2) \\ x \leq 2 \end{cases}$$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$  . إذن  $\mathcal{E}_f$  يقبل نصف مماس رأسي ؛ موجه

نحو الأعلى ؛ على اليمين في النقطة التي أفصولها 2 .

3. ليكن  $x \in ]2, +\infty[$  لدينا :

$$f'(x) = (x + \sqrt{x^2 - 2x})' = 1 + \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 + \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} > 0$$

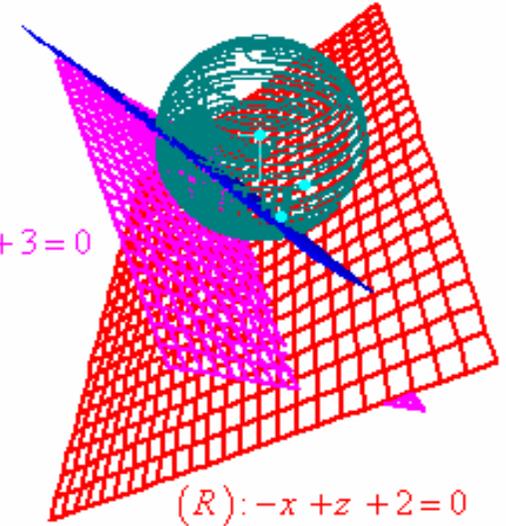
إذن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]2, +\infty[$  .

ليكن  $x \in ]-\infty, 2[$  لدينا :

$$f'(x) = (x + \ln(3-x))' = 1 + \frac{(3-x)'}{3-x} = 1 - \frac{1}{3-x} = \frac{2-x}{3-x} > 0$$

إذن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]-\infty, 2[$  .

$$(P): x + y + z - 1 = 0$$



$$(Q): 2x + y + 2z + 3 = 0$$

$$(R): -x + z + 2 = 0$$

### التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln(3-x) & ; x \leq 2 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} & ; x > 2 \end{cases}$$

أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(3-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3-t + \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3-t \left(1 - \frac{\ln(t)}{t}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$$

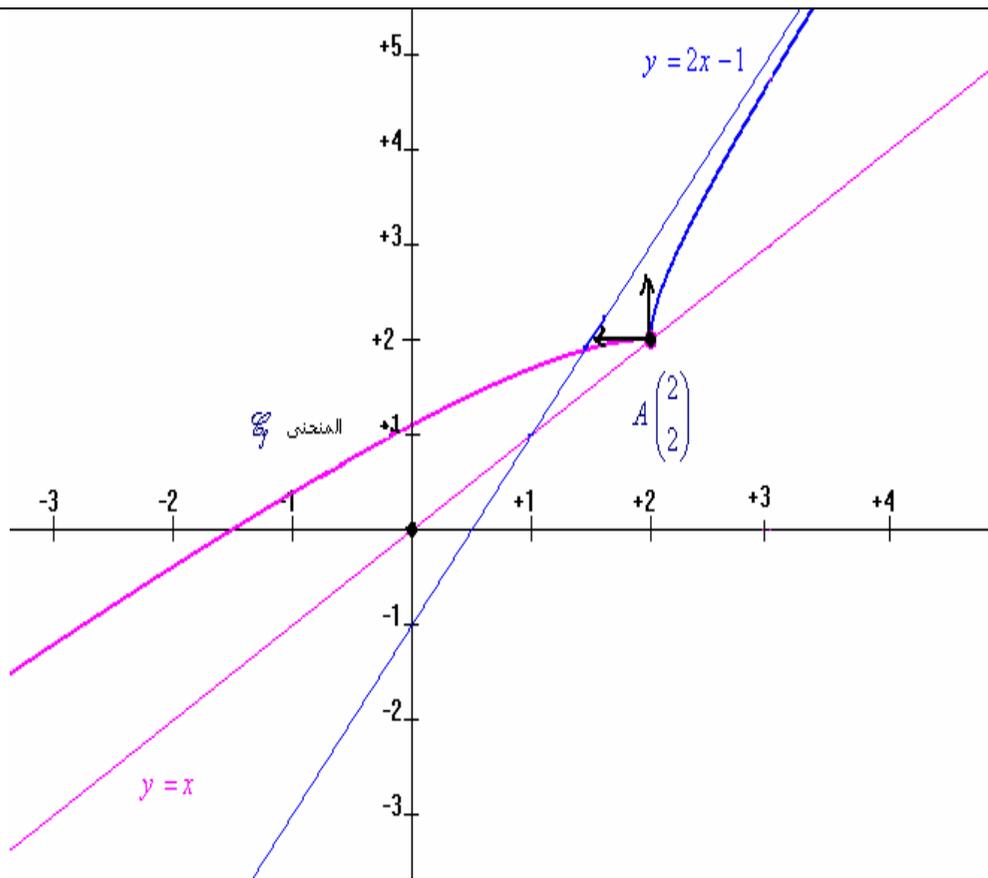
حيث :  $t = 3 - x$  ؛ ولدينا :  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + |x| \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + x \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x}\right)}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

ب- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + \sqrt{x^2 - 2x} = 2$



6. ليكن  $g$  قصور الدالة  $f$  على المجال  $[2, +\infty[$ .

أ- لدينا  $g$  متصلة وتزايدية قطعاً على المجال  $[2, +\infty[$ . إذن  $g$  تقابل من المجال

$$J = g([2, +\infty[) = [g(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[ = [2, +\infty[$$

ب- لدينا :  $g^{-1} : [2, +\infty[ \rightarrow [2, +\infty[$   
 $x \mapsto y = g^{-1}(x) ?$

ليكن  $x \in [2, +\infty[$  و  $y \in [2, +\infty[$  بحيث :  $y = g^{-1}(x)$  ينبغي تحديده ؟

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = y + \sqrt{y^2 - 2y} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x - y = \sqrt{y^2 - 2y}$$

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$x$	$-\infty$		$2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$+\infty$	$+$
$f(x)$		$\nearrow +\infty$			
	$-\infty$				

4. لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 - 2x} - 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x})^2 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) + x - 1}} = 0$$

إذن  $\mathcal{E}_f$  يقبل مقارباً مائلاً ؛ بجوار  $+\infty$  ؛ معادلته :  $y = 2x - 1$ .

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و بوضع  $t = 3 - x$  نجد  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(3 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{\ln(3 - x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(t)}{3 - t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{1}{\frac{3}{t} - 1} = 1$$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3 - x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$  ؛ حيث  $t = 3 - x$ .

إذن  $\mathcal{E}_f$  يقبل فرعاً شلجياً ؛ بجوار  $-\infty$  ؛ اتجاهه المستقيم ذو المعادلة  $y = x$ .

5. إنشاء المنحنى  $\mathcal{E}_f$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

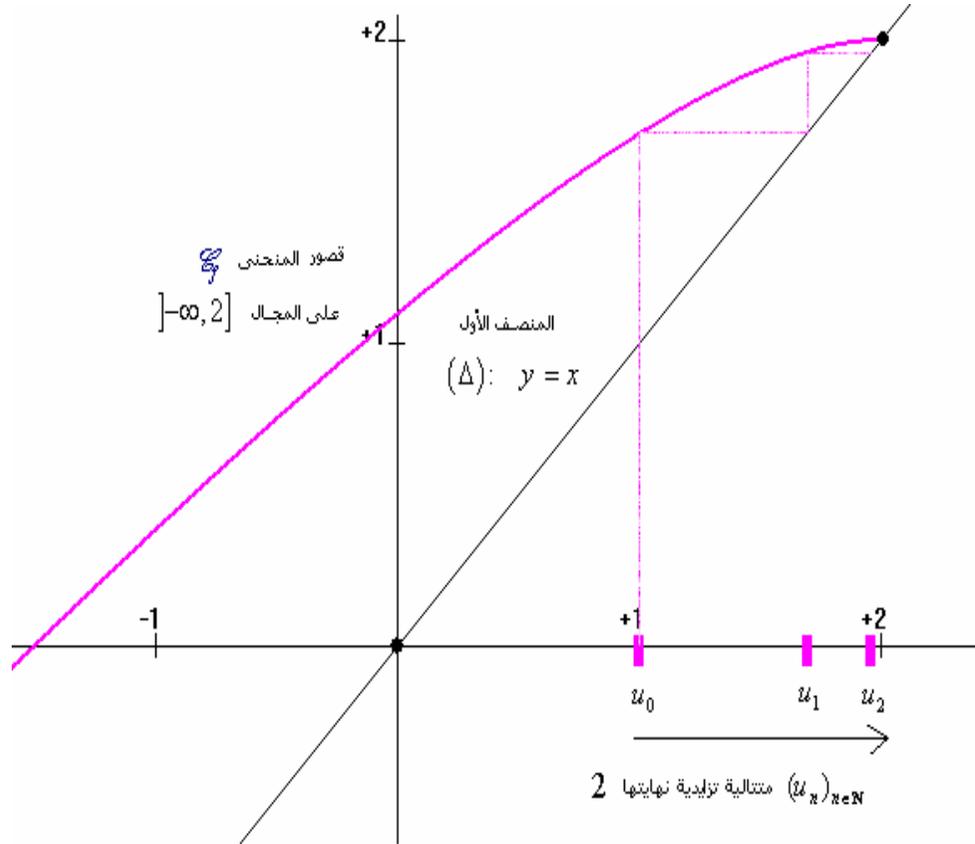
نشئ الفرعين اللانهائين للمنحنى  $\mathcal{E}_f$ .

نشئ نصفياً مماساً للمنحنى  $\mathcal{E}_f$  في النقطة ذات الأفصول 2.

نحسب بعض الصور عند الاقتضاء .

إذن :  $f(l) = l \Leftrightarrow l = l + \ln(3-l) \Leftrightarrow \ln(3-l) = 0 \Leftrightarrow 3-l = 1 \Leftrightarrow l = 2$

وبالتالي فإن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$



بالتوفيق إنشاء الله



$$\begin{aligned} y = g^{-1}(x) &\Rightarrow (x-y)^2 = y^2 - 2y \\ &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2y \\ &\Rightarrow x^2 = 2xy - 2y \\ &\Rightarrow x^2 = (2x-2)y \\ &\Rightarrow y = \frac{x^2}{2(x-1)} \end{aligned}$$

$$g^{-1} : [2, +\infty[ \rightarrow [2, +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{2(x-1)}$$

وبالتالي فإن :

7. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \ln(3-u_n) = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل  $n = 0$  ؛ لدينا :  $u_0 = 1$  ؛ إذن :  $0 < u_0 \leq 2$  .

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . نفترض أن :  $0 < u_n \leq 2$  .

نبين أن :  $0 < u_{n+1} \leq 2$  .

لدينا  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]0, 2]$  ؛ إذن :

$$0 < u_n \leq 2 \Rightarrow f(0) < f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 0 < \ln(2) < u_{n+1} \leq 2 \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq 2$$

وبالتالي فإن :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq 2$

ب- ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . لدينا :  $u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n)$  . وبما أن :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(3-u_n) \geq 0 \text{ ؛ فإن : } 0 < u_n \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -u_n < 0 \Rightarrow 1 \leq 3-u_n < 3$$

ومنه فإن المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تزايدية .

ج- لدينا  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تزايدية ومكبورة بالعدد 2 . إذن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة .

ولدينا :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in ]0, 2]$

$f$  دالة متصلة على المجال  $]0, 2]$  .

$f$  مستقر بالدالة  $f$  .  $]0, 2] : f(]0, 2]) = ]\ln(2), 2] \subset ]0, 2]$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة نهايتها  $l$