

SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

## الامتحان التجريبي 2004

التمرين الأول :

$$x = \ln 2 \Rightarrow t = 1 \text{ و } x = \ln 4 \Rightarrow t = \sqrt{3} \quad (1)$$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1+t^2} = [2\text{Arctg}(t)]^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} : \text{ إذن } dx = \frac{2t dt}{1+t^2} \text{ ومنه } t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow x = \ln(1+t^2)$$

$$J = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \Leftarrow \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)] \text{ و } J = [x\text{Arctg}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (2)$$

التمرين الثاني :

(1) أ-

$x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$	$\frac{C_2^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{2}{10}$	$\frac{C_2^2 + C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{3}{10}$	$\frac{C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{2}{10}$

$$ب- \quad p(A) = \frac{C_2^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{10}$$

$$ج- \text{ الحدث } A \cap (X = 2) \text{ هو " سحب بيدقتين تحملان الرقم 1" ، إذن } p(A \cap (X = 2)) = \frac{1}{10}$$

$$\text{و لدينا } p(A)p(X = 2) = \frac{3}{50} \text{ ، إذن الحدثان } (X = 2) \text{ و } A \text{ غير مستقلين } \left(\frac{1}{10} \neq \frac{3}{50}\right)$$

$$(2) \text{ لدينا } p = C_3^2 [p(A)]^2 [1 - p(A)] + C_3^3 [p(A)]^3 \text{ إذن } p = \frac{13}{125}$$

التمرين الثالث :

$$(1) \quad z'' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \text{ و } z' = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \Leftarrow \Delta = -4i = 2(1-i)^2$$

$$(2) \quad |z''| = \sqrt{\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$|z'| = \sqrt{\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$(3) \quad z'z'' = 1 + i \text{ (جاء جذري } az^2 + bz + c \text{ يساوي } \frac{c}{a}) \text{ و } z'+1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \left[1, \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$(4) \text{ لدينا } z' = -1 + \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftarrow z'+1 = \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{Sin}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

إذن  $(\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$  و  $\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ )  $z' = -2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 2i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

يعني  $z' = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$  و منه  $\boxed{\text{Arg}(z') = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}}$

من جهة أخرى ،  $z'z'' = 1 + i$  ،  $\text{Arg}(z'z'') = \frac{\pi}{4}$

يعني  $\text{Arg}(z') + \text{Arg}(z'') = \frac{\pi}{4}$  إذن  $\boxed{\text{Arg}(z'') = -\frac{5\pi}{8}}$

التمرين الرابع:

(1)  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \vec{AB}(-4,1,1)$  و  $\vec{AC}(-2,0,1)$

$(ABC): x + 2y + 2z + d = 0$  إذن  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  منظمية على  $(ABC)$

$(ABC): x + 2y + 2z + 2 = 0$  و بالتالي  $d = 2 \Leftrightarrow C \in (ABC)$

(2) لدينا  $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$  إذن  $r = 3$  و  $\Omega(1,1,2)$

(3)  $(ABC) \Leftrightarrow d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1+2+4+2|}{\sqrt{9}} = 3 = r$  مماس للفاكلة  $(S)$

$H(a,b,c)$  نقطة التماس هي المسقط العمودي للنقطة  $\Omega(1,1,2)$  على  $(ABC)$  ، إذن :

$$H(0,-1,0) \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = 1+t \\ b = 1+2t \\ c = 2+2t \\ a+2b+2c+2 = 0 \end{cases}$$

مسألة :

-I

(1) أ-  $f(-1) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$  إذن  $f$  متصل في  $-1$  .

ب-  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} = -\infty$  إذن  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $-1^+$

$C_f$  يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة  $A(-1,0)$  على اليمين .

ث-  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}}$  إذن  $f$  قابلة للاشتقاق في  $-1^-$

$C_f$  يقبل نصف مماس معامله الموجه  $2e^{-\frac{1}{2}}$  في النقطة  $A(-1,0)$  على اليسار .

ج-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt[3]{x+1} = +\infty$

$C_f$  يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتايب بجوار  $+\infty$  .

د-  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} + 2 \cdot \frac{-x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$  (ضع  $t = \frac{-x^2}{2}$ )

## SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

$C_f$  يقبل محور الأفاصيل كمستقيم مقارب بجوار  $-\infty$ .

$$(2) \text{ أ. إذا كان } x > -1 \text{ فإن } f'(x) = \sqrt[3]{x+1} + \frac{x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x+1} + x \left[ \frac{1}{3} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \right]$$

$$\text{يعني } f'(x) = \frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

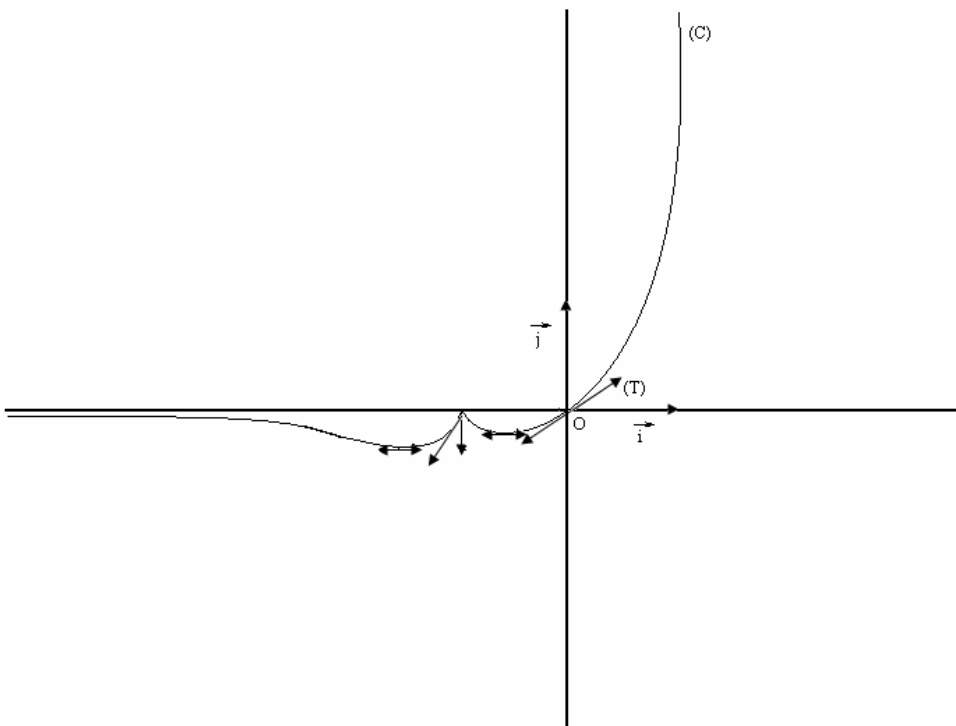
$$\text{إذا كان } x < -1 \text{ فإن } f'(x) = x(x^2-3)e^{\frac{-x^2}{2}} \Leftrightarrow f'(x) = -2xe^{\frac{-x^2}{2}} + (1-x^2) \left( -xe^{\frac{-x^2}{2}} \right)$$

ب-

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	--	0	+	--	+
$f'(x)$	0		0		$+\infty$
		$-2e^{\frac{-3}{2}}$		$-\frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	

$$(3) \text{ لكل } x \text{ من } [-1, +\infty[ \text{ لدينا } f(x) - x = x \left( \sqrt[3]{x+1} - 1 \right) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} \geq 0$$

$$(4) \text{ أ. } (T): y = f'(0)x + f(0) \text{ يعني } (T): y = x \text{ ب. المنحنى:}$$



SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

-II

$$(1) \text{ لدينا } U_0 \in [-1, +\infty[ \text{ نفترض أن } U_n \in [-1, +\infty[ \text{ إذن } h(U_n) \in h([-1, +\infty[) = \left[ -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, +\infty \right[$$

يعني  $U_{n+1} \in [-1, +\infty[$  ، وبالتالي  $\forall n \geq 0 \ U_n \in [-1, +\infty[$   
 حسب السؤال 3 من الجزء الأول ، وبوضع  $x = U_n$  نجد  $U_{n+1} = h(U_n) \geq U_n$  إذن  $(U_n)$  تزايدية.  
 (2) أ- من أجل  $n = 0 : -1 \leq U_0 < 0$  ، نفترض أن  $-1 \leq U_n < 0$  .

$$\text{لدينا إذن } U_n \in [-1, 0[ \text{ يعني } h(U_n) \in h([-1, 0]) = \left[ -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, 0 \right] \text{ وبالتالي } U_{n+1} \in [-1, 0[$$

$$\text{إذن } \forall n \geq 0 \ U_n \in [-1, 0[$$

ب-  $(U_n)$  تزايدية ومكبورة ب0 إذن فهي متقاربة.

نضع  $I = [-1, 0[$  .  $h$  متصلة على  $I$  و  $h(I) \subset I$  و  $(U_n)$  متقاربة، إذن نهايتها  $l$  تحقق  $h(l) = l$ .

$$\text{أي } l(1 - \sqrt[3]{l+1}) = 0 \text{ ومنه } l = 0$$

(3) أ- لدينا  $U_{n+1} - U_n = U_n(\sqrt[3]{1+U_n} - 1)$  و  $U_n \geq U_0$  و  $(U_n)$  تزايدية) ، إذن (وبما أن  $U_0 > 0$ )

$$\text{نجد } U_{n+1} - U_n \geq U_0(\sqrt[3]{1+U_0} - 1) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ب- من أجل  $n = 0 : U_0 \geq U_0$  (العلاقة محققة) . نفترض أن  $U_n \geq U_0 + n\lambda$

$$\text{و لدينا } U_{n+1} \geq U_n + \lambda \text{ إذن } U_{n+1} \geq U_0 + n\lambda + \lambda \text{ أي } U_{n+1} \geq U_0 + (n+1)\lambda$$

إذن  $U_n \geq U_0 + n\lambda$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

$$\text{ج- لدينا } \lambda > 0 \text{ إذن } \lim U_0 + n\lambda = +\infty \text{ ومنه } \lim U_n = +\infty$$