التمرين الأول:

1) a- لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-2,-2)$ إذن

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&-2\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&-2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}=\boxed{-2\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)}$$

b- بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2) نستنتج من 1) a) أن المتجهة $\vec{n}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ منظمية على المستوى (ABC) إذن معادلة هذا الأخير هي على شكل:

$x-y+z+d=0$

وبما أن $A(0,1,1)\in(ABC)$ فإن $d=0$ و بالتالي فإن:

$$\boxed{(ABC): x-y+z=0}$$

3) a- يمكن لمعادلة الفلكة (S) أن تكتب :

$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z)^2=(1)^2}$ إذن شعاع (S) هو $\boxed{R=1}$

و مركزها هو $\boxed{\Omega(1,2,0)}$

b- لتكن d مسافة Ω عن المستوى (ABC) لدينا:

$d=\dfrac{|1-2+0|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ إذن $d<R$ و بالتالي

فإن: المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

c- **ليكن R' شعاع (Γ)؛ $R'=\sqrt{R^2-d^2}=\boxed{\sqrt{6}/3}$

**لتكن النقطة $H(x_H,y_H,z_H)$ مركز (Γ)؛ نجد من

$x_H-y_H+z_H=0$ و $\begin{cases}x_H=1+k\\y_H=2-k\\z_H=k\end{cases}$ ؛ $k\in\mathbb{R}$: $\boxed{H\begin{pmatrix}4/3\\5/3\\1/3\end{pmatrix}}$

4) ليكن (P) أحد المستوين الموازيين ل (ABC) و المماسين ل (S)

معادلة (P) هي على شكل: $x-y+z+m=0/m\in\mathbb{R}$

لتكن d' مسافة Ω عن (P) لدينا $d'=R$ و

$d'=R\Leftrightarrow\dfrac{|1-2+0+m|}{\sqrt{3}}=1\Leftrightarrow m=1-\sqrt{3}$ أو $m=1+\sqrt{3}$

وباتالي فإن المستويين الموازيين ل (ABC) و المماسين ل (S) هما:

$$\boxed{\begin{cases}(P_1): x-y+z+1-\sqrt{3}=0\\(P_2): x-y+z+1+\sqrt{3}=0\end{cases}}$$

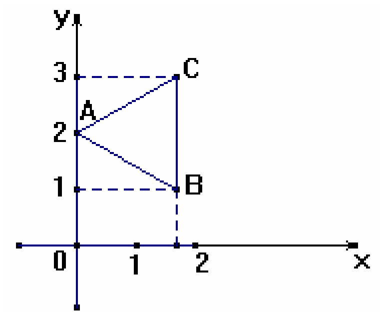
التمرين الثاني: $(E): z\in\mathbb{C}; z^2-(\sqrt{3}+3i)z-2+2i\sqrt{3}=0$

1) a- $(-\sqrt{3}+i)^2=2-2i\sqrt{3}$

b- مميز (E) هو $\Delta=2-2i\sqrt{3}=(-\sqrt{3}+i)^2\neq0$ إذن، ل (E) حلين مختلفين هما: $a=2i$ و $b=(\sqrt{3}+i)$ وبالتالي: $\boxed{S=\{a,b\}}$

2) a- $b=\left[2,\pi/6\right]$ و $c=\left[2\sqrt{3},\pi/3\right]$

b- إنشاء $A(a=2i)$ و $B(b=\sqrt{3}+i)$ و $C(c=\sqrt{3}+3i)$:



3) a- $\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\boxed{\left[1,-\dfrac{\pi}{3}\right]}$

b- نستنتج أن $\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الأضلاع}}$

4) a- $c-a=(\sqrt{3}+3i)-(2i)=\sqrt{3}+i=b$

b- لدينا $c-a=b-0$ إذن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ ولدينا المثلث ABC متساوي الأضلاع ومنه فإن $\boxed{\text{الرباعي } OBCA}$ معين.

التمرين الثالث:

1) عدد النتائج الممكنة هو: $A_5^2\times A_4^1=(5\times4)\times4=\boxed{80}$

2) عدد النتائج التي تكون فيها الكرات الثلاث تحمل الرقم0 هو:

$A_3^2\times A_2^1=(3\times2)\times2=\boxed{12}$

3) عدد النتائج التي يكون فيها مجموع أرقام الكرات الثلاث يساوي2هو

$A_2^2\times A_2^1+A_2^1\times A_3^1\times A_2^1+A_3^1\times A_2^1\times A_2^1=\boxed{28}$

التمرين الرابع:

1) **

$$\int_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx=\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$$

$$=\left[x-e^x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-x\right]_{0}^{1}=\boxed{\frac{1}{e}+e-2}$$

**

$$\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)dx=\int_{e}^{e^2}\frac{\ln'(x)}{\ln(x)}dx$$

$$=\left[\ln\left(\ln(x)\right)\right]_{e}^{e^2}=\boxed{\ln(2)}$$

2) a- ليكن $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$،

$$\frac{1}{\sin^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}=\boxed{\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}}$$

b-

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin^2(x)}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}\right)dx$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\tan'(x)}{\tan^2(x)}dx=\left[-\frac{1}{\tan(x)}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\boxed{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(3

$$J=\left[x\cos(\pi\ln(x))\right]_1^e+\pi\int_1^e x\sin(\pi\ln(x))\frac{1}{x}dx$$

$$=-(e+1)+\pi\int_1^e\sin(\pi\ln(x))dx=-(e+1)+\pi K$$

$$K=\left[x\sin(\pi\ln(x))\right]_1^e-\pi\int_1^e x\cos(\pi\ln(x))\frac{1}{x}dx$$

إذن $K=-\pi J$

وبالتالي $J=-(e+1)-\pi^2 J$

ومنه $\boxed{J=-\left(\frac{e+1}{\pi^2+1}\right)}$

مسألة:

الجزء الأول:

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x-1\right)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

(2 a- $(\forall x\in\mathbb{R})\ ,\ g'(x)=e^x-1$

b) –

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$			0		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c- بما أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة g عند 0 فإنه:

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ,\ g(x)>0}$$

(3 نعتبر الدالة h بحيث: $(\forall x\in]1,2[),h(x)=g(x)-x$ ، لدينا:

$$\begin{cases}\begin{cases}(\forall x\in]1,2[),\\ h'(x)=e^x-2>0\end{cases}\\ h(1)\times h(2)<0\end{cases}$$ إذن $(\exists!\alpha\in]1,2[)/h(\alpha)=0$

وبالتالي للمعادلة $[x\in\mathbb{R},g(x)=x]$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

الجزء الثاني:

(1 $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\right)=\boxed{1}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}+\ln(x+1)\right]=\boxed{+\infty}$

(2 لدينا $f(0)=1$ إذن

$$*\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\left[t\ln^2(t)\right]$$

$$=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\left[2\sqrt{t}\ln(\sqrt{t})\right]^2=\boxed{0}$$

و

$$*\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[\frac{e^{-x}+\ln(x+1)-1}{x}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[-\frac{1}{e^x}\frac{e^x-1}{x}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=-1+1=\boxed{0}$$

نستنتج جبريا أن f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0)=0$

و نستنتج هندسيا أن (C_f) يقبل في 0 مماس معادلته $y=f(0)$

أي $\boxed{y=1}$

(3 a-

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ,f'(x)=\left[e^{-x}+\ln(x+1)\right]'$$

$$=-e^{-x}+\frac{1}{x+1}=e^{-x}\left(\frac{e^x}{x+1}-1\right)$$

$$=e^{-x}\left(\frac{e^x-x-1}{x+1}\right)=\boxed{\frac{e^{-x}g(x)}{(x+1)}}$$

b-

$$(\forall x\in]-\infty,0[)\ ,f'(x)=\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\right)'$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=\boxed{\left(-\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\right)(x+1)}$$

بماأن $x<0$ فإن $\left(-\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\right)>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x+1$.

c-

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(4 a-

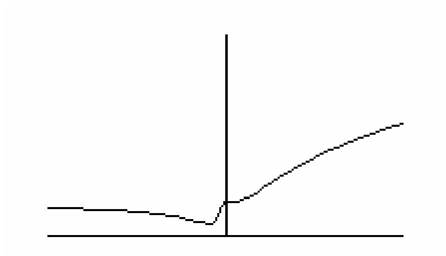
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+\ln(x+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{xe^x}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

b-

* (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل
* (C_f) يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته هي: $y=1$

c-



(5

$$\lambda(\Delta)=\int_0^1\left(e^{-x}+\ln(x+1)\right)dx$$

$$=\left[-e^{-x}+(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]_0^1$$

$$=\boxed{-e^{-1}+2\ln(2)}$$

الجزء الثالث:

(1

* $U_1 = g(U_0) = e^{\ln(2)} - \ln(2) - 1$ (لأن $U_0 = \ln(2)$)
$= 2 - \ln(2) - 1 = \boxed{1 - \ln(2)}$

* بما أن $1 < \alpha < 2$ و $\ln(2) < 1$ فإن: $0 < 1 - \ln(2) < \ln(2) < 1 < \alpha$
وبالتالي فإن: $\boxed{0 < U_1 < U_0 < \alpha}$

2) نبين بالترجع على n من $\mathbb{N}$ أن $0 < U_n < \alpha$

*أساس الترجع: $0 < U_0 < \alpha$ و ذلك حسب السؤال السابق

*فرضية الترجع:ليكن $n \in \mathbb{N}$، نفترض أن $0 < U_n < \alpha$ و نبين أن:
$0 < U_{n+1} < \alpha$.
نعلم أن g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ إذن بالخصوص على $[0,\alpha]$
وبما أن $0 < U_n < \alpha$ فإن $g(0) < g(U_n) < g(\alpha)$ و حيث إن
$g(0) = 0$ و $g(\alpha) = \alpha$ و $g(U_n) = U_{n+1}$ فإن $0 < U_{n+1} < \alpha$

*خاتمة: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n < \alpha}$

3) نبين بالترجع على n أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$

*أساس الترجع: $0 < U_1 < U_0 < \alpha$ وذلك حسب السؤال 1)

*فرضية الترجع: ليكن $n \in \mathbb{N}$، نفترض أن $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$ و
نبين أن: $0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$.
نعلم أن g تزايدية قطعا على $[0,\alpha]$ إذن نستنتج من الإفتراض أن
$g(0) < g(U_{n+1}) < g(U_n) < g(\alpha)$ و بالتالي فإن:
$0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$

*خاتمة: $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$
إذن المتتالية $\boxed{(U_n) \text{ تناقصية}}$

4) نعتبر المجال $\mathrm{I} = [0,\alpha]$، لدينا
* $\boxed{g \text{ متصلة}}$ و تزايدية قطعا على I وحيث $g(0) = 0 / g(\alpha) = \alpha$
فإن $g(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ إذن $\boxed{g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}}$
* $0 < U_0 < \alpha$ إذن $\boxed{U_0 \in \mathrm{I}}$
* (U_n) تناقصية و مصغورة إذن $\boxed{(U_n) \text{ متقاربة}}$
بهذه المعطيات نستنتج أن نهاية (U_n) ، l، تحقق $l \in \mathrm{I}$ و $g(l) = l$
و بما أن 0 و α هما الحلين الوحيدين في I للمعادلة $g(l) = l$ و
(U_n) تناقصية فإن $l = 0$
خاتمة: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (U_n) = 0}$.