المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الشاوية ورديغة-سطات نيابة خريبكة ثانوية يوسف بن تاشفين التأهيلية	الامتحان التجريبي أبريل 2007	المادة : الرياضيات المستوى: 2سلك الباكالوريا الشعبة: علوم تجريبية المعامل: 7 المدة : 3ساعات

تمرين1

1) أ) نحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

لدينا $A\,(0\,;\,1;\,1)$; $B\,(\,1;\,4;\,0)$; $C\,(\,1;\,0;\,1)$ و منه $\overrightarrow{AB}(1;3;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;\text{-}1;0)$

$$Z=-4 \leftarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ 1 & -1\\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1\\ 0 & 1\\ \hline\end{array} \rightarrow Y=-1$$

$$\downarrow$$

$$X=-1$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1;-1;-4)$$

ب) نستنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1;-1;-4)$ منظمية على المستوى (ABC) و منه $(ABC)\ :\text{-}x\text{-}y\text{-}4z+d=0$

و حيث أن $A\,(0\,;\,1;\,1)\in(ABC)$ فان $d=5$ إذن $(ABC)\ :\text{-}x\text{-}y\text{-}4z+5=0$

2) -

أ) نبين أن (S) فلكة شعاعها $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ مع تحديد احداثياتمركزها Ω.

$$M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\frac{13}{2}=0$$

$$M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{9}{2}$$

إذن (S) فلكة شعاعها $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ومركزها $\Omega(1;1;3)$

ب) نبين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

لدينا $(ABC)\ :\text{-}x\text{-}y\text{-}4z+5=0$ و $\Omega(1;1;3)$ مركز الفلكة (S)

$$d\left(\Omega;(ABC)\right)=\frac{|-1-1-12+5|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{9}{\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=R$$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S).

تمرين2

المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1} \quad ;\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1- نبين أن $1\prec u_n\prec 2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\dfrac{3}{2}$ ومنه $1\prec u_0\prec 2$

نفترض أن $1\prec u_n\prec 2$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n نبين أن $1\prec u_{n+1}\prec 2$

لدينا $1\prec u_n\prec 2$ و منه $0\prec u_n-1\prec 1$

و بالتالي $0\prec\sqrt{u_n-1}\prec 1$ و منه $1\prec 1+\sqrt{u_n-1}\prec 2$ أي أن $1\prec u_{n+1}\prec 2$

إذن $1\prec u_n\prec 2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

-2 نبين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و نستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n=\sqrt{u_n-1}\left(1-\sqrt{u_n-1}\right)$$

بما أن $1\prec u_n\prec 2$ فان $0\prec 1-\sqrt{u_n-1}$

ومنه $u_{n+1}-u_n\succ 0$ إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية

و حيث أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بالعدد 2 فان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

-3 نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ $v_n=\ln(u_n-1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

أ- نبين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=-\ln 2$

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\ln(u_0-1)=\ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\ln 2$

ب- نحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=-\ln 2$

و منه $v_n=(-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}(-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

لدينا $v_n=\ln(u_n-1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ومنه $1+e^{v_n}=u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

اذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 1+e^{v_n}=2$

تمرين3

-1 نتأكد أن $(2i-1)^2=-3-4i$

$$(2i-1)^2=-4-4i+1=-3-4i$$

-2 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)\quad z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=0$

أ/ نتأكد أن -4 حل للمعادلة (E)

$$(-4)^3+2(-4)^2+4(-1+i)(-4)+16(1+i)=-64+32+16-16i+16+16i=0$$

اذن -4 حل للمعادلة (E)

ب/ نحدد العددين b و a حيث $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=(z+4)(z^2+az+b)$

$$\forall z\in\mathbb{C}\qquad (z+4)(z^2+az+b)=z^3+(4+a)z^2+(4a+b)z+4b$$

وحيث $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=(z+4)(z^2+az+b)$ $\forall z\in\mathbb{C}$

و منه $4a+b=4(-1+i)$; $4b=16(1+i)$; $4+a=2$

اذن $b=4(1+i)$; $a=-2$

ج/ نحدد z_1 و z_2 جدري المعادلة $z^2-2z+4(1+i)=0$ $z\in\mathbb{C}$

ليكن Δ' المميز المختصر للمعادلة $\Delta'=(-1)^2-4(1+i)=-3-4i=(2i-1)^2$

و منه $z_1=1+(2i-1)=2i$ و $z_2=1-(2i-1)=2-2i$

د/ نستنتج حلول المعادلة (E)

لدينا $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=(z+4)(z^2-2z+4(1+i))$ $\quad \forall z\in\mathbb{C}$

$$(E)\Leftrightarrow (z+4)(z^2-2z+4(1+i))=0$$

$$(E)\Leftrightarrow z=-4 \quad ou \quad z=2i \quad ou \quad z=2-2i$$

اذن حلول المعادلة (E) هي -4 و $2i$ و $2-2i$

3- نكتب حلول المعادلة (E) في شكلها المثلثي

$$-4=[4;\pi] \quad \text{و} \quad 2i=\left[2;\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{و} \quad 2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]$$

4- المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$،

نبين أن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في B.

لدينا A و B و C النقط التي ألحاقها -4 و $2i$ و $2-2i$ على التوالي

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv \arg\frac{2-2i-2i}{-4-2i} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv \arg\frac{2-4i}{-4-2i} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv \arg\frac{i(-2i-4)}{-4-2i} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv \arg i \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

اذن $\left[\widehat{ABC}\right]$ زاوية قائمة.

لدينا $BC=|2-4i|=\sqrt{20}$ $\quad$ $BA=|-4-2i|=\sqrt{20}$ و منه $BA=BC$

اذن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في B.

تمرين4

الصندوق يحتوي على 7 بيادق سوداء مرقمة، أربعة بيادق منها تحمل الرقم 1 و البيادق الاخرى تحمل رقم 2 . و ثلاث بيادق بيضاء بيدقان منها تحمل الرقم 1 و البيدق الاخر يحمل الرقم 2 . نسحب بالتتابع و بدون إحلال بيدقين

1- نحسب احتمال الحصول على بيدقين مجموع رقميهما زوجي

نعتبر الحدث A : "الحصول على بيدقين مجموع رقميهما زوجي"

$$P(A)=\frac{A_6^2+A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{6\times5+4\times3}{10\times9}=\frac{7}{15}$$

3- نحسب احتمال الحصول على بيدقين سوداوين علما أن مجموع رقميهما زوجي.

نعتبر الحدث N: "الحصول على بيدقين سوداوين"

$$P_A(N)=\frac{P(A\cap N)}{P(A)}=\frac{\frac{A_3^2+A_4^2}{A_{10}^2}}{\frac{7}{15}}=\frac{15}{7}\times\frac{3\times2+4\times3}{10\times9}=\frac{15}{7}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{7}$$

تمرين5

A) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}+1$

-1 نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}+1\right)=1$$

-2 نبين أن $g'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيرات g على $]0;+\infty[$

ليكن x من $]0;+\infty[$ $\quad g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}+1$

و منه

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+x-x^2-2x-1+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\dfrac{-1}{x(x+1)^2}\prec 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$ أي $g'(x)\prec 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

اذن g تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$

-3 نستنتج أن $g(x)\succ 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

لدينا g تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

اذن $g(x)\succ 0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

B) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1 & ;x\succ 0 \\ f(x)=(1-x)e^x & ;x\leq 0 \end{cases}$$

-1 أ/ نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$ ثم نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

نضع $x=\dfrac{1}{t}$ ومنه $t=\dfrac{1}{x}$ و بالتالي $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$

و منه $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+x+1=+\infty$

ب/ نحدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ونؤول النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^x=\lim_{x\to-\infty} e^x-xe^x=0$$

و منه محور الافاصيل مقارب للمنحنى (C_f)

ج/ نبين أن f متصلة في 0 .

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1=\lim_{x\to0^+} x\ln(x+1)-x\ln(x)+x+1=1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(1-x)e^x=1$$

ومنه $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)$ اذن f متصلة في 0 .

-2 ندرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و على اليسار في 0 ثم نؤول النتيجتين هندسيا.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x)e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}-e^x=1-1=0$$

و منه f قابلية اشتقاق على اليسار في 0 و تقبل نصف مماس أفقي على يسار في 0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+1=+\infty$$

و منه f غير قابلية الاشتقاق على اليمين في 0 و تقبل نصف مماس عمودي على يمين في 0

-3 أ/ نبين أن $f'(x)=g(x)$ $\forall x\in]0;+\infty[$ و أن $f'(x)=-xe^x$ $\forall x\in]-\infty;0[$

ليكن $x\in]0;+\infty[$ $\quad f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1$

$$f'(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}+1=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}+1=g(x)$$

ليكن $x\in]-\infty;0[$ $\quad f(x)=(1-x)e^x$

$$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$$

ب/ نعطي جدول تغيرات f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

-4 نبين أن النقطة A ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ليكن $x\in]-\infty;0[$ $\quad f'(x)=-xe^x$

$$f''(x)=-e^x-xe^x=-(x+1)e^x$$

$$f''(x)\Leftrightarrow-(x+1)e^x=0\Leftrightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	0
$f''(x)$	+	0	-

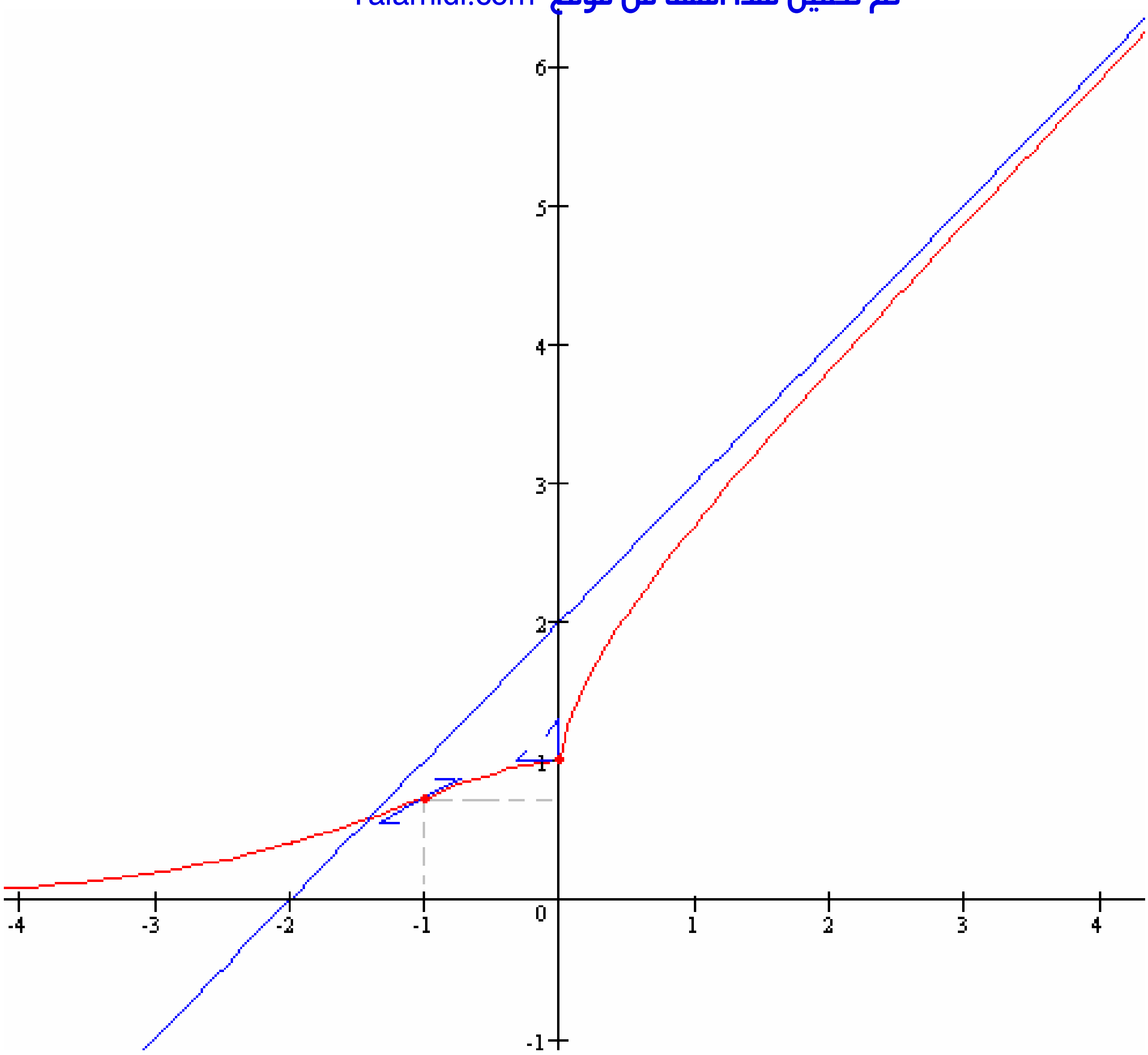
اذن النقطة A ذات الافصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

-5 نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x+2)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1=1-1=0$$

اذن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

-6 ننشئ المنحنى (C_f).


6
5
4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4