الجداء السلمي – الفلكة
الجداء المتجهي

I- الجداء السلمي.

نفترض في كل ما يلي أن الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$

لدينا $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ و $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

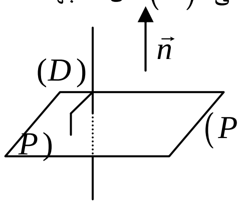
2) نعتبر النقطتين $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ ،

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

3) **المستقيمات والمستويات في الفضاء الأقليدي.**

a) ليكن (P) مستوى. نسمي متجهة منظمية على (P) كل متجهة $\vec{n}$ موجهة لمستقيم (D) عمودي على (P).

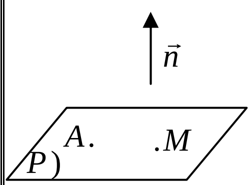


b) نعتبر المستوى $(P):ax+by+cz+d=0$ المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P).

c) معادلة مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

مثال: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(1,-1,2)$ والمتجهة $\vec{n}(2,1,-1)$ منظمية عليه:

الطريقة 1: $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$



$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)+(y+1)-(z-2)=0$$

إذن: $(P):2x+y-z+1=0$

الطريقة 2: لدينا $\vec{n}(2,1,-1)$ منظمية على (P) إذن معادلة (P) على شكل $2x+y-z+d=0$ ولدينا $A(1,-1,2)\in(P)$ إذن $2-1-2+d=0$ يعني $d=1$ إذن $(P):2x+y-z+1=0$.

d) تعامد مستقيمين.

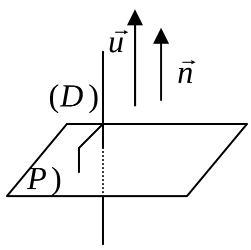
ليكن (D) و (D') مستقيمين موجهين ب $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ على التوالي:

يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $aa'+bb'+cc'=0$.

e) تعامد مستقيم ومستوى.

i) ليكن (D) مستقيم موجه ب $\vec{u}$ و (P) مستوى موجه ب $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

يكون $(D)\perp(P)$ إذا وفقط إذا كان $\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\\vec{u}\perp\vec{w}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\vec{u}.\vec{v}=0\\\vec{u}.\vec{w}=0\end{cases}$.



ii) ليكن (D) مستقيم موجه ب $\vec{u}(a,b,c)$ و (P) مستوى بحيث تكون $\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ منظمية عليه.

*) يكون $(D)\perp(P)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مستقيميتين.

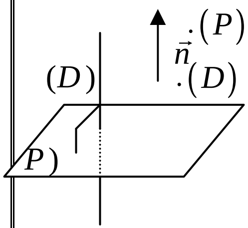
يعني $\begin{vmatrix}a&\alpha\\b&\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&\alpha\\c&\gamma\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&\beta\\c&\gamma\end{vmatrix}=0$

*) يكون $(D)//(P)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{u}\perp\vec{n}$ يعني $\vec{u}.\vec{n}=0$

iii) إذا كان المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) فإن:

*) كل متجهة موجهة ل (D) تكون منظمية على (P).

*) وكل متجهة منظمية على (P) تكون موجهة ل (D).



f) تعامد مستويين.

i) ليكن (P) و (Q) مستويين و $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ منظميتين عليهما على التوالي.

*) يكون $(P)\perp(Q)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}\perp\vec{n'}$ يعني $\vec{n}.\vec{n'}=0$.

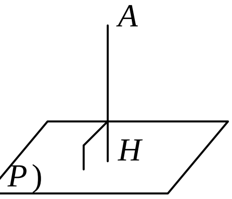
*) يكون $(P)//(Q)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مستقيميين.

ii) نعتبر المستويين $(P):ax+by+cz+d=0$

و $(Q):a'x+b'y+c'z+d'=0$

يكون $(P)\perp(Q)$ إذا وفقط إذا $aa'+bb'+cc'=0$.

g) مسافة نقطة عن مستوى.



i) ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء

و H المسقط العمودي ل A على (P)

المسافة AH تسمى مسافة A عن (P)

ونكتب $d(A,(P))=AH$.

ii) نعتبر المستوى $(P):ax+by+cz+d=0$

والنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$.

لدينا $\boxed{d(A,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

II) الفلكة.

1) الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة النقط M التي تحقق $\Omega M=r$.

2) معادلة الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها r هي:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$

نقوم بالنشر ونجعل المعادلة على شكل:

$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$.

3) نعتبر المجموعة

$$(\Gamma): x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان.

الطريقة1: نضع $a=\frac{-\alpha}{2}$ $b=\frac{-\beta}{2}$ $c=\frac{-\gamma}{2}$ $d=\delta$ ونحسب $a^2+b^2+c^2-d$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d<0$ فإن $\Gamma=\varnothing$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d=0$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b,c)\}$

*) إذا كان $a^2+b^2+c^2-d>0$ فإن فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

الطريقة2 نقوم بتحويل المعادلة لنرجعها على شكل

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k$$

باستعمال بداية متطابقة هامة $X^2+\alpha X=\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

*) إذا كان $k<0$ فإن $(\Gamma)=\varnothing$

*) إذا كان $k=0$ فإن $(\Gamma)=\{\Omega(a,b,c)\}$

*) إذا كان $k>0$ فإن $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r=\sqrt{k}$.

4) **معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.**

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (S) هناك طريقتان:

الطريقة1

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\\z-z_B\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

الطريقة 2:

نستعمل مباشرة الصيغة

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

5) **تقاطع فلكة ومستوى.**

a) لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من أجل دراسة تقاطع (S) و (P) نقوم بحساب $d=d(\Omega,(P))$ وهناك ثلاث حالات:

i) إذا كانت $d>r$ فإن (P) يوجد خارج (S) ((P) لا يقطع (S)).

ii) إذا كان $d=r$ فإن (P) و (S) يتقاطعان في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (P) مماس ل (S) في H ونقط التماس H هي المسقط العمودي ل Ω على (P).

iii) إذا كانت $d<r$ فإن المستوى (P) يقطع (S) وفق الدائرة (ℓ) الموجودة ضمن المستوى (P) التي مركزها هو H المسقط العمودي ل Ω على (P) وشعاعها $r'=\sqrt{r^2-d^2}$.

b) إذا كانت $d(\Omega,(P))$ فإن $\Omega\in(P)$ ونقول في هذه الحالة إن المستوى (P) مستوى قطري. وفي هذه الحالة المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة الكبرى (ℓ) الموجودة ضمن (P) التي مركزها Ω وشعاعها هو r.

c) لتكن (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها x.

i) يكون (P) مماسا ل (S) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega,(P))=r$.

ii) يكون (P) مماسا ل (S) في A إذا وفقط إذا كان (ΩA) عمودي على (P) في A.

iii) المستوى المماس للفلكة (S) في A هو المستوى المار من A و $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه.

6) **تقاطع فلكة ومستقيم:**

نعتبر المستقيم $(D):\begin{cases}x=x_0+\alpha t\\y=y_0+\beta t\\z=z_0+\gamma t\end{cases}$

والفلكة (S) التي معادلتها:

$$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

من أجل دراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D) نقوم بحل النظمة:

$$\begin{cases}x=x_0+\alpha t & (1)\\y=y_0+\beta t & (2)\\z=z_0+\gamma t & (3)\\x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 & (4)\end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها t.

ليكن Δ مميز هذه المعادلة:

i) إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة ليس لها حل إذن (D) لا يقطع (S).

ii) إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا إذن (D) يقطع (S) في نقطة وحيدة H ونقول في هذه الحالة إن (D) مماس ل (S) في H.

iii) إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين t_1 و t_2 إذن (D) يقطع (S) في نقطتين A و B وللحصول على أحداثيات A و B نعوض t_1 و t_2 في (1) و (2) و (3).

III) الجداء المتجهي

1- ليكن $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا ممنظما مباشرا.

ونعتبر المتجهتين $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

لدينا

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}.\vec{k}$$

2) تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\wedge\vec{v}=0$

3) a) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين موجهتين لمستوى (P) فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منظمية على (P).

b) لتكن A,B,C ثلاث نقط غير مستقيمة (يعني $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq 0$) المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

4) مساحة المثلث (ABC) هي $\boxed{S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$

5) مساحة المتوازي أضلاع $(ABCD)$ هي $\boxed{S=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|}$

6) ليكن (D) مستقيم مار من A وموجه بالمتجهة $\vec{u}$ ولتكن M نقطة.

لدينا $\boxed{d(M,(D))=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}}$

7) *) $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

*) $\alpha\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$

*) $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

*) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

8) من أجل دراسة تقاطع مستقيم (D) وفلكة (S) يمكن حساب $d(\Omega,(D))$ ثم استنتاج التقاطع.