الجداء المتجهي

I- توجيه الفضاء

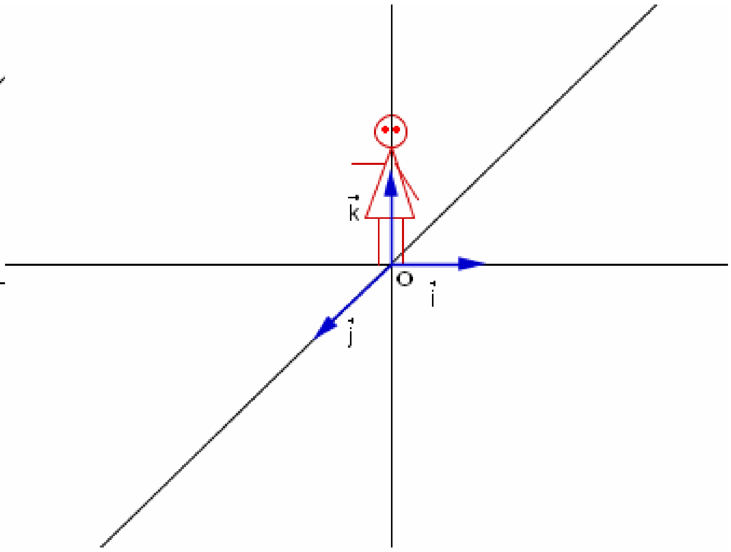
1- معلم موجه في الفضاء

ننسب الفضاء E إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

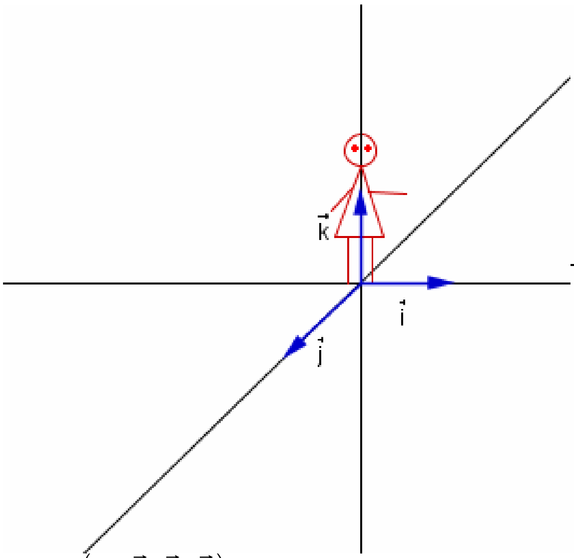
لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

« رجل أمبير » للمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر إلى I

النقطة J إما توجد على يمين« رجل أمبير » أو على يساره .



معلم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$



معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. لتكن I وJ وK ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

نقول إن : * $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »

* $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

أمثلة * نعتبر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم مباشر

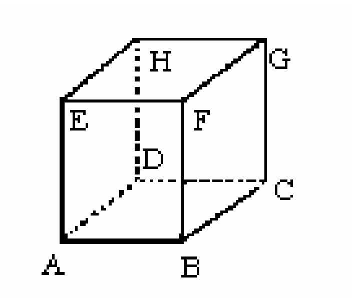
$\left(O;\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};-\vec{k}\right)$ معلم غير مباشر

$\left(O;\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$ معلم مباشر

** ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1

$\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)$; $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان مباشران

$\left(E;\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH}\right)$, $\left(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)$ معلمان غير مباشرين



2- الأسرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء V_3 , اذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ مباشر اذا كان $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و $\vec{k}$ متجهة واحدية و منظمية على (P) , و O نقطة من المستوى (P) $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ م.م.م للمستوى (P)

لدينا $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد ممنظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشرا

* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منظمية عليه.
* كل المستويات الموازية لـ(P) له نفس توجيه المستوى (P)

II – الجداء المتجهي

1- تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء V_3 وA و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ $\quad \vec{u}=\overrightarrow{OA}$
الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب, هو المتجهة التي لها بـ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ المعرفة كما يلي
:

* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$.
* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هي المتجهة التي تحقق :
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$
  - $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ حيث θ قياس الزاوية $[\widehat{AOB}]$

أمثلة * نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i} \qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين واحديتين و متعامدتين فان $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .

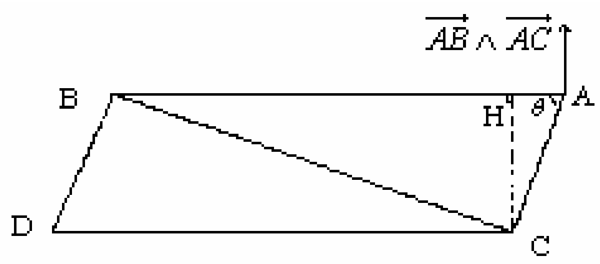
تمرين نحسب $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ علما أن $\theta\in]0;\pi[$ $\quad (\overline{\vec{u};\vec{v}})=\theta$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=-5$ $\quad \|\vec{v}\|=2$ $\quad \|\vec{u}\|=5$

2- خاصيات

أ- خاصية

إذا كانت A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية $[\widehat{CAB}]$, H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$HC=AC\sin\theta \qquad \|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB.AC.\sin\theta$$

$$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB\times HC$$

خاصية

مساحة المثلث ABC هو نصف $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

نتيجة

مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

د- خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
يكون $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منعدما إذا وفقط كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

البرهان * $\Rightarrow$ (بديهي – التعريف-)
* $\Leftarrow$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$
$$\Rightarrow\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=0 \quad \vee \quad \|\vec{v}\|=0 \quad \vee \quad \sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0} \quad \vee \quad \vec{v}=\vec{0} \quad \vee \quad \vec{u}et\vec{v} \quad sont\ liés$$

ملاحظة A وB و C مستقيمية $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

ج- الجداء المتجهي والعمليات(نقبل)

$$\forall(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\in V_3^3 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R} \qquad (\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$$
$$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$$

تمرين

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر .

أحسب $\vec{i}\wedge3\vec{j}$ $\quad(\vec{i}+2\vec{k})\wedge\vec{j}$ $\quad(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})\wedge\vec{k}$ $\quad(2\vec{i}-\vec{j})\wedge(3\vec{i}+4\vec{j})$

تمرين

لتكن $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{d}$; $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{d}$

بين إن $\vec{a}-\vec{d}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ مستقيميتان

3- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م مباشر

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{u}(x;y;z) \qquad \vec{v}(x';y';z')$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

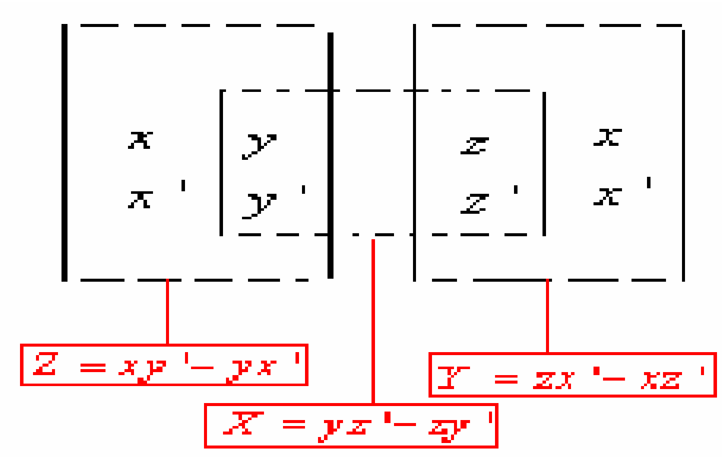
خاصية

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x(;y';z')$ متجهتان من V_3

إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ هو (X;Y;Z) حيث

$$X=yz'-zy' \qquad Y=zx'-xz' \qquad Z=xy'-yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعية التالية



مثال نعتبر $\vec{v}(-2;-1;1)$ $\quad\vec{u}(1;2;0)$ $\quad A(1;2;1)$ $\quad B(0;-3;2)$ $\quad C(1;2;1)$

حدد $\vec{u}\wedge\vec{v}$ $\qquad$ أحسب مساحة المثلث (ABC)

III – تطبيقات الجداء المتجهي

1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية

خاصية

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AM}$$

مثال نعتبر A(1;2;3) و B(1;-1;1) و C(2;1;2) حدد معادلة المستوى (ABC)

2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

(P) : ax+by+cz+d=0

(P´) : a´x+b´y+c´z+d´=0

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظمية لـ (P) و $\vec{n}'(a';b';c')$ منظمية لـ (P´)

* اذا كان (P) و(P´) متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و(P´) موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و(P´) متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع (P): x+2y-2z+3=0 و (P´): 4x-4y+2z-5=0

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء وH مسقطها العمودي على(D)

$$\overrightarrow{AH} et \vec{u} \quad liés \qquad \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$$

$$\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = HM.\|\vec{u}\| \sin\frac{\pi}{2} = HM.\|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A وموجه بـ $\vec{u}$, M نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي $d\left(M;(D)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

تمرين

A(3;2;-1) $\qquad (D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad d\left(A;(D)\right) = ?$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1) وB(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي معادلته

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد d(A;(D))

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)