تصحيح التمرين 1

1. لدينا : $\overrightarrow{OA}(1,2,1)$ و $\overrightarrow{OB}(1,3,1)$

لدينا : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{k}$

2. لدينا $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(-1,0,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل : $(-1)x + (0)y + (1)z + d = 0$

و لدينا : $O(0,0,0) \in (OAB)$ إذن : $(-1)(0) + (0)(0) + (1)(0) + d = 0$ أي $d = 0$

إذن المعادلة تصبح : $-x + z = 0$

و منه : $x - z = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

3. بما أن : الفلكة (S) مماسة للمستوى (OAB) فإن شعاع (S) هو :

$$d(\Omega,(OAB)) = \frac{|(-3)-(1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

ولدينا $\Omega(-3,0,1)$ هو مركز الفلكة (S)

إذن معادلة الفلكة (S) : $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

4. نقطة التماس هي نقطة تقاطع المستوى (OAB) مع المستقيم (Δ) العمودي على (OAB) و المار من $\Omega(-3,0,1)$.

لدينا $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(-1,0,1)$ موجهة للمستقيم (Δ)

(لأن $(\Delta) \perp (OAB)$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متجهة للمستوى (OAB))

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$

و منه مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو حل للنظمة : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \\ x - z = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ t = -2 \end{cases}$

و بالتالي مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو : $(-1,0,-1)$

5. لدينا : $H(-1,0,-1) \in (S)$ ، بما أن $\overrightarrow{\Omega H}(2,0,-2)$ فإن : $\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u} = 10\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$

و لدينا : $d(\Omega,(D)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{264}}{\sqrt{33}} = 2\sqrt{2}$ ، حيث (D) هو النستقيم المار من H و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(2,5,2)$.

و بما أن $2\sqrt{2}$ شعاع الفلكة (S) فإن (D) مماس للفلكة (S).

تصحيح التمرين 2

1. أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(0,4,-2)$ و $\overrightarrow{BC}(-1,-2,2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

ب) $d(A,(BC)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \dfrac{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(2)^2}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \dfrac{6}{3} = 2$

2. H هي نقطة تقاطع المستوى (P) المار من A و العمودي على (BC) مع المستقيم (BC)

تمثيل بارامتري للمستقيم (BC) : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-2t \\ z = 1+2t \end{cases}$

لدينا $\overrightarrow{BC}(-1,-2,2)$ منظمية للمستوى (P) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل :
$-x-2y+2z+d=0$

و لدينا : $A(2,-1,1) \in (P)$ إذن : $-(2)-2(-1)+2(1)+d=0$ إذن : $d=-2$

أي : $(P): -x-2y+2z-2=0$

و منه مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو حل للنظمة : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-2t \\ z = 1+2t \\ -x-2y+2z-2=0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{5}{3} \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

و بالتالي : $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$ هو مثلوث إحداثيات H

.3 $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{HM}=0$

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2,y+1,z-1)$ و $\overrightarrow{HM}\left(x-\frac{2}{3},y-\frac{1}{3},z-\frac{5}{3}\right)$

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)+(y+1)\left(y-\frac{1}{3}\right)+(z-1)\left(z-\frac{5}{3}\right)=0$$

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{8}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{8}{3}z+\frac{8}{3}=0$$

تصحيح التمرين 3

.1

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(S)&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0\\&\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4+z^2+2z+1=4+1-2\\&\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3\\&\Leftrightarrow(x-(0))^2+(y-(2))^2+(z-(-1))^2=\left(\sqrt{3}\right)^2\end{aligned}$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(0,2,-1)$ و شعاعها $R=\sqrt{3}$

.2 أ) لدينا : $(-1)^2+((1)-2)^2+((0)+1)^2=1+1+1=3=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن : $A(-1,1,0)\in(S)$

ب) (P) مماس ل (S) عند النقطة A

لدينا A هي المسقط العمودي ل Ω على (P)

إذن $\overrightarrow{A\Omega}(1,1,-1)$ منظمية للمستوى (P)

إذن معادلة للمستوى (P) تكتب على شكل : $(1)x+(1)y+(-1)z+d=0$

و لدينا $A(-1,1,0)\in(P)$ إذن : $(1)(-1)+(1)(1)+(-1)(0)+d=0$ أي : $d=0$

و منه معادلة للمستوى (P) تكتب على شكل : $x+y-z=0$

.3 أ) لدينا : $\vec{n}(1,1,1)$ متجهة منظمية للمستوى (Q) و $B(1,3,-2)\in(Q)$

$$M(x,y,z)\in(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0$$

لدينا : $\overrightarrow{BM}(x-1,y-3,z+2)$

$$M(x,y,z)\in(Q)\Leftrightarrow(1)(x-1)+(1)(y-3)+(1)(z+2)=0$$

و منه : $(Q):x+y+z-2=0$

ب) لدينا : $d\left(\Omega,(Q)\right)=\dfrac{\left|(0)+(2)+(-1)-2\right|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

بما أن $d\left(\Omega,(Q)\right)<R$ فإن (Q) يقطع (S) وفق دائرة شعاعها :

$r=\sqrt{R^2-\left(d\left(\Omega,(Q)\right)\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

مركز الدائرة H هو نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (Q) مع المستوى (Q)

مثلوث إحداثيات H هو حل للنظمة $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=-1+t \\ x+y+z-2=0 \end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \\ z=\dfrac{-2}{3} \\ t=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

ومنه $H\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3},\dfrac{-2}{3}\right)$.

تصحيح التمرين 4

1. أ) لدينا $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ متجهة موجهة للمستقيم (OA)

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(OA) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=t.\overrightarrow{OA}\ (t\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}\quad (t\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

ب) لدينا $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ منظمية للمستوى (Q)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل : $x-y+3z+d=0$

و لدينا : $A(1,-1,3)\in(Q)$ إذن : $(1)-(-1)+3(3)+d=0$ أي $d=-11$

و منه معادلة ديكارتية للمستوى (Q) : $x-y+3z-11=0$

ج) $\vec{n}(1,-1,3)$ متجهة منظمية للمستوى (P) و $\vec{n}'(1,-1,3)$ متجهة منظمية للمستوى (Q)

بما أن $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ مستقيميتان فإن $(P)//(Q)$

2. أ) بما أن (Q) مماس للفلكة (S) في النقطة A فإن A هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (Q) و منه :

$$\boxed{(\Omega A)\perp(Q)}$$

و بما أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (Γ) مركزها O فإن O هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) و منه :

$$(\Omega O)\perp(P)$$

و بما أن $(P)//(Q)$ فإن

$$\boxed{(\Omega O)\perp(Q)}$$

إذن النقط Ω و A و O مستقيمية . و بالتالي $\Omega\in(OA)$.

بما أن $\Omega(a,b,c)\in(OA)$ فإن المثلوث (a,b,c) يحقق التمثيل البارامتري للمستقيم (OA) أي : $\begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=3t \end{cases}$

و منه : $b=-a$ و $c=3a$

ب) لدينا : $R^2=\left(d\left(\Omega,(P)\right)\right)^2+r^2$ حيث R هو شعاع الفلكة (S) و r هو شعاع الدائرة (Γ)

و بما أن المستوى (Q) مماس للفلكة (S) في النقطة A فإن $R=\Omega A$

و لدينا كذلك $d\left(\Omega,(P)\right)=\Omega O$ و $r=\sqrt{33}$

إذن : $\Omega A^2=\Omega O^2+\sqrt{33}^2$ و منه :

$$\boxed{\Omega A^2-\Omega O^2=33}$$

لدينا : $\Omega A^2=a^2+b^2+c^2-2a+2b-6c+11$ و $\Omega O^2=a^2+b^2+c^2$

بالتعويض في النتيجة المحصل عليها نجد :

$$\boxed{a-b+3c=-11}$$

ج) المثلوث (a,b,c) يحقق $b=-a$ و $c=3a$ و $a-b+3c=-11$

إذن : $a-(-a)+3(3a)=-11$ أي : $a=-1$ و منه $b=1$ و $c=-3$ و بالتالي: $\Omega(-1,1,-3)$

و لدينا كذلك : $R=\Omega A=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

تصحيح التمرين 5

1. لدينا : $\vec{n}(1,1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (P) و $(D)\perp(P)$ إذن $\vec{n}(1,1,-1)$ موجهة للمستقيم (D)

و لدينا : $A(2,0,2)\in(D)$.

$$M(x,y,z)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=t.\vec{n}\,(t\in\mathbb{R})$$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases}$.

2. لدينا النقطة B هي نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوى (P) و بالتالي مثلوث إحداثياتها يحقق :

$(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ أي : $t = 1$ ومنه : $B(3,1,1)$

3. أ)

$$R^2 = r^2 + AB^2$$
$$R = \sqrt{r^2 + AB^2}$$
$$R = \sqrt{(2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$R = \sqrt{7}$$

ب) معادلة ديكارتية للفلكة (S) : $(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 1 = 0$

تصحيح التمرين 6

1. معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها $R = \sqrt{3}$:

$$(x-(1))^2 + (y-(-1))^2 + (z-(0))^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$$
$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0}$$

لدينا : $(0)^2 + (0)^2 + (1)^2 - 2(0) + 2(0) - 1 = 1 - 1 = 0$

إذن : $A(0,0,1) \in (S)$

2. أ) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ منظمية للمستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $x-y-z+d=0$

و لدينا : $A(0,0,1) \in (ABC)$ إذن : $(0)-(0)-(1)+d=0$ و منه : $d=1$

و بالتالي : $(ABC): x-y-z+1=0$

ب) $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|(1)-(-1)-(0)+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

بما أن : $d(\Omega,(ABC)) = R$ فإن (ABC) مماس للفلكة (S)

و بما أن $A \in (S)$ و $A \in (ABC)$ فإن (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة A

3. أ) لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ منظمية للمستوى (ABC) و $(\Delta) \perp (ABC)$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)(t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=t \\ y+1=-t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$$

ب) مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S) هما حل النظمة :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z=-t \\ (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3 \end{cases}$$

نجد بالتعويض : $t^2=1$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \\ t=-1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=-1 \\ t=1 \end{cases}$$

إذن مثلوث إحداثيتي نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S) هما : $(0,0,1)$ و $(2,-2,-1)$

تصحيح التمرين 7

1. لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ و $\overrightarrow{AC}(5,9,2)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1&9\\2&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&5\\2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&5\\1&9\end{vmatrix}\vec{k}=-16\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$$

2. $$d\left(C,(AB)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}=\frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}}=\sqrt{56}$$

3. لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-16,8,4)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $-16x+8y+4z+d=0$

و لدينا : $A(0,1,-1)\in(ABC)$ إذن : $-16(0)+8(1)+4(-1)+d=0$ إذن : $d=12$

و منه : المعادلة تصبح : $-16x+8y+4z+12=0$

و بالتالي معادلة (ABC) هي : $-4x+2y+z+3=0$

4. أ) لدينا : $x^2+y^2+z^2-10x-20y-2z+70=0$

تكافئ $(x-5)^2+(y-10)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{56}\right)^2$

إذن : (S) هي الفلكة التي مركزها $C(5,10,1)$ و شعاعها $R=\sqrt{56}$

ب) بما أن $d\left(C,(AB)\right)=R$ فإن (AB) مماس للفلكة (S)

مثلوث إحداثيات نقطة لتماس يحقق : $(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=-1+2t\\(x-5)^2+(y-10)^2+(z-1)^2=56\end{cases}$$

بالتعويض نجد : $t=3$

و منه : $\begin{cases}x=3\\y=4\\z=5\end{cases}$

إذن النقطة $H(3,4,5)$ هي نقطة لتماس