الهندسة الفضائية

التمرين 1

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A\left(2,0,0\right)$ **و** $B\left(2,2,2\right)$ **و** $C\left(0,0,2\right)$ **و** $I\left(2,1,2\right)$ **و** $J\left(0,-1,0\right)$

1) **حدد مثلوث إحداثيات** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
2) **استنتج أن** $x-y+z-2=0$ **معادلة ديكارتية للمستوى** $\left(ABC\right)$
3) **تأكد أن المستقيم** $\left(IJ\right)$ **عمودي على المستوى** $\left(ABC\right)$
4) **لتكن** $\left(S\right)$ **الفلكة التي مركزها** I **و المماسة للمستوى** $\left(ABC\right)$
   أ. **حدد معادلة ديكارتية للفلكة** $\left(S\right)$
   ب. **حدد مثلوث إحداثيات نقطة تماس الفلكة** $\left(S\right)$ **و المستوى** $\left(ABC\right)$

التصحيح

1) **لدينا :** $\overrightarrow{AB}\left(0,2,2\right)$ **و** $\overrightarrow{AC}\left(-2,2,2\right)$

إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$

ومنه $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$

2) **لدينا** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ **متجهة منظمية للمستوى** $\left(ABC\right)$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى $\left(ABC\right)$ **تكتب على شكل :** $4x+4y+4z+d=0$

و بما أن $A\left(2,0,0\right)\in\left(ABC\right)$ **فإن :** $4\left(2\right)+4\left(0\right)+4\left(0\right)+d=0$ **و منه** $d=-8$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى $\left(ABC\right)$ **تكتب على شكل :** $4x+4y+4z-8=0$

و منه نستنتج أن : $x+y+z-2=0$ **معادلة ديكارتية للمستوى** $\left(ABC\right)$

3) لدينا $\overrightarrow{IJ}(-2,-2,-2)$ متجهة موجهة للمستقيم (IJ) و لدينا $\overrightarrow{AB}(4,4,4)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و نلاحظ أن : $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتان

و منه $\overrightarrow{IJ}$ هي أيضا متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و بالتالي المستقيم (IJ) عمودي على المستوى (ABC)

4) أ. لدينا (S) الفلكة التي مركزها $I(2,1,2)$ و المماسة للمستوى (ABC)

إذن r شعاع الفلكة (S) يساوي $d(I,(ABC))$

لنحسب $d(I,(ABC))$:

$$d(I,(ABC))=\frac{|(2)+(1)+(2)-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

و منه (S) الفلكة التي مركزها $I(2,1,2)$ و شعاعها $r=\sqrt{3}$

إذن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على شكل : $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(\sqrt{3})^2$

ب. ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة $I(2,1,2)$ و العمودي على المستوى (ABC)

و بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(4,4,4)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(4,4,4)$ هي أيضا متجهة موجهة للمستقيم (Δ).

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) يكتب على شكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2+4t\\ y=1+4t\\ z=2+4t\end{cases}$

لتكن $H(x_H,y_H,z_H)$ نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (ABC)

$$H(x_H,y_H,z_H)\in(\Delta)\cap(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=2+4t\\ y_H=1+4t\\ z_H=2+4t\\ x_H+y_H+z_H-2=0\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+4t \\ y_H = 1+4t \\ z_H = 2+4t \\ (2+4t)+(1+4t)+(2+4t)-2=0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+4t \\ y_H = 1+4t \\ z_H = 2+4t \\ t = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 \end{cases}$$

و بالتالي النقطة $H\,(1,0,1)$ **هي نقطة تماس الفلكة** (S) **و المستوى** (ABC)