درس الاتصال

(الثانية علوم تجريبية)

1) تذكير : النهايات

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فـردي} \end{cases}$

2. نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(ax)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(ax)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

5. جداول النهايات:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2) اتصال دالة في عدد :

تعريف 1:

f متصلة في a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال : أدرس اتصال الدالة f في العدد $a=1$:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+6x-7}{x-1} \quad ; x \neq 1 \\ f(1) = 8 \end{cases}$$

لدينا : $f(1)=8$.

لنحسب $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{x^2+6x-7}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+7)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+7) = 8$$

بما أن $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$ فإن f متصلة في العدد 1.

تعريف 2:

- ✓ f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

مثال : أدرس اتصال الدالة f في العدد $a = 0$:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = x^2 - x + 2 & ; x \le 0 \end{cases}$$

لدينا : $f(0) = (0)^2 - (0) + 2 = 2$.

لنحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$:

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2.\frac{\sin(2x)}{2x} = 2$$

لنحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$:

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 - x + 2 = 2$$

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0)$

3) **الإتصال على مجال :**

خاصيات :

- f متصلة على مجال $]a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$
- f متصلة على مجال $[a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b
- f متصلة على مجال $[a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $]a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يسار b

4) العمليات على الدوال المتصلة

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدوال المثلثية $\sin$ و $\cos$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- دالة $\tan$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f+g$ و $f\times g$ متصلتان على I
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g\neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و $f\geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ متصة على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I)\subset J$ فإن $g\circ f$ متصلة على I

أمثلة :

1. $f:x\mapsto x^3-\frac{1}{2}x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$
2. $f:x\mapsto \frac{2x}{x-2}$ متصلة على كل مجال ضمن $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ لأن $D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ f دالة جدرية
3. $f:x\mapsto cosx+x^2-7x+3$

لدينا : $f_1:x\mapsto cosx$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f_2:x\mapsto x^2-7x+3$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f=f_1+f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ كمجموع لدالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

4. $f:x\mapsto (x-1)\times\sin x$

لدينا : $f_1:x\mapsto x-1$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f_2:x\mapsto \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f=f_1\times f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ كجداء لدالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

5. $f:x\mapsto\sqrt{x-2}$

لدينا : $f_1 : x \mapsto x-2$ متصلة على $[2,+\infty[$ و لكل x من $[2,+\infty[$: $f_1(x) \geq 0$

إذن $f = \sqrt{f_1}$ متصلة على $[2,+\infty[$

.6 $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

لدينا : $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

و لدينا $f_2 : x \mapsto x^2+1$ متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $\mathbb{R}^+$ و لكل x من $\mathbb{R}^+$: $f_2(x) \neq 0$

إذن $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

.7 $f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{7}\right)$

لدينا $f_1 : x \mapsto x^2 + \dfrac{\pi}{7}$ حدودية متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث $f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ و الدالة $f_2 : x \mapsto \sin(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f = f_2 o f_1$ متصلة على $\mathbb{R}$

5) صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعا

$f(I)$	المجال I	
$\left[f(a),f(b)\right]$	$\left[a,b\right]$	f تزايدية قطعا
$\left[f(a),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x)\right[$	$\left[a,b\right[$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x),f(b)\right]$	$\left]a,b\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x)\right[$	$\left]a,b\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(a)\right]$	$\left]-\infty,a\right]$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right[$	
$\left[f(b),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left[b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty,+\infty\right[$	
$\left[f(b),f(a)\right]$	$\left[a,b\right]$	f تناقصية قطعا
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x),f(a)\right]$	$\left[a,b\right[$	
$\left[f(b),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)\right[$	$\left]a,b\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)\right[$	$\left]a,b\right[$	
$\left[f(a),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(b)\right]$	$\left[b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}f(x)\right[$	$\left]b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$\left]-\infty,+\infty\right[$	

مثال 1:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\}=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

لنحدد صور المجالات التالية : $[2;3]$ و $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ و $]1;4]$ و $[0;1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن D_f (لأنها دالة جدرية)

ليكن $x\in D_f$:

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2.(x-1)-(2x+1).1}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

إذن : $(\forall x\in D_f)\ \ f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. من الواضح أن $(\forall x\in D_f)\ \ f'(x)<0$ و منه الدالة f تناقصية قطعا على D_f

$$f([2;3])=[f(3);f(2)]=\left[\frac{7}{2};5\right]$$

$$f(]1;+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)\right[=]2;+\infty[$$

$$f(]-\infty;1[)=\left]\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x);\lim_{x\to-\infty}f(x)\right[=]-\infty;2[$$

$$f(]1;4])=\left[f(4);\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)\right[=[3;+\infty[$$

$$f([0;1[)=\left]\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x);f(0)\right]=]-\infty;-1]$$

مثال 2:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3+7x-2$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=(x^3+7x-2)'=3x^2+7$ إذن : $f'(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

و منه الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

لنحدد صور المجالات التالية : $]-\infty;+\infty[$ و $[1;3]$

$$f\left(\left]-\infty;+\infty\right[\right)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left]-\infty;+\infty\right[$$

$$f\left([1;3]\right)=\left[f(1);f(3)\right]=[6;46]$$

6) مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a;b]$ بحيث : $f(c)=\lambda$

نتائج :

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة : $x^4+x-3=0$ تقبل حلا على الأقل في $]0;2[$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=x^4+x-3$

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,2]$
- لدينا $f(0)=-2$ و $f(2)=15$ إذن $f(0)\times f(2)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $]0;2[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a,b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة $x^3+2x=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,1]$ $\quad (x^3+2x=1 \Leftrightarrow x^3+2x-1=0)$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=x^3+2x-1$

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$

ليكن $x\in[0;1]$: $f'(x)=\left(x^3+2x-1\right)'=3x^2+2$

إذن : $f'(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ و منه f تزايدية قطعا على $[0,1]$

- $f(0)=-1$ و $f(1)=2$ إذن $f(0)\times f(1)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية فإن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

مثال :

لنبين أن المعادلة $2x^3+5x-4=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0<\alpha<1$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=2x^3+5x-4$

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)=\left(2x^3+5x-4\right)'=3x^2+5$

إذن : $f'(x)>0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ و منه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

- لنحسب $f(\mathbb{R})$: $f(\mathbb{R})=f\left(\left]-\infty;+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=\left]-\infty;+\infty\right[=\mathbb{R}$

إذن : $0 \in f(\mathbb{R})$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

✓ لنتحقق أن $0<\alpha<1$:

- الدالة f متصلة $[0,1]$

- $f(0)=-4$ و $f(1)=3$ إذن $f(0)\times f(1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن : $0<\alpha<1$

7) الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J=f(I)$ نحو I

نتائج:

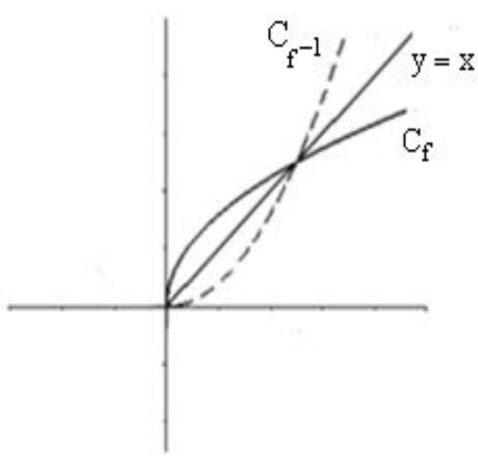
$$(1)\quad \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} f^{-1}\circ f(x)=x & ;x\in I \\ f\circ f^{-1}(x)=x & ;x\in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)



<u>مثال :</u>

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}$

- لنبين أن g قصور f على المجال $[0;1]$ تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده :

✓ g قصور دالة جدرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g متصلة على $[0;1]$

✓ g قصور دالة جدرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

ليكن $x\in[0;1]$: $g'(x)=\left(\dfrac{3x+5}{x+1}\right)'=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

إذن : $g'(x)<0$ $(\forall x\in[0;1])$ و منه g تناقصية قطعا على $[0;1]$

و بالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحو $[0;1]$

بحيث : $J=g([0;1])=[g(1);g(0)]=[4;5]$

- لنحدد : $g^{-1}(x)$ $(\forall x\in J)$

✓ ليكن $x\in J=[4;5]$

$$y=g^{-1}(x)\Leftrightarrow x=g(y)\quad (y\in I=[0;1])$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3y+5}{y+1}$$
$$\Leftrightarrow x.(y+1)=3y+5$$
$$\Leftrightarrow xy+x=3y+5$$
$$\Leftrightarrow xy-3y=5-x$$
$$\Leftrightarrow y.(x-3)=5-x$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{5-x}{x-3}$$

إذن : $\left(\forall x\in J=[4;5]\right)\quad g^{-1}(x)=\frac{5-x}{x-3}$

8) الجذر من الرتبة n _ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

أ. تعريف :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

الدالة العكسية للدالة $x\mapsto x^n$ على المجال $[0,+\infty[$ تسمى دالة الجدر من الرتبة n و نرمز لها ب : $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

ب. أمثلة :

$(n=1)\quad \sqrt[1]{x}=x$

$(n=2)\quad \sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ (الجذرالمربع)

$(n=3)\quad \sqrt[3]{x}$ (الجذر المكعب)

ج. خصائص :

ليكن x و y عددان حقيقيان موجبان. لدينا :

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$ $\quad$ $\sqrt[n]{x^n}=x$ $\quad$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[nm]{x}$ $\quad$ $\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x}^m$

$\sqrt[n]{x.y}=\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$ $\quad$ $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\quad(y\neq0)$

أمثلة :

أ. لنبسط ما يلي :

$a=\sqrt[3]{27}\quad b=\sqrt[4]{16}\quad c=\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

$a=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

$b=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

$c=\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{3^6}=3$

ب. قارن العددان : $x=\sqrt[3]{4}$ و $y=\sqrt[4]{5}$

لدينا : $x=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3\times4]{4^4}=\sqrt[12]{256}$ و $y=\sqrt[4]{5}=\sqrt[4\times3]{5^3}=\sqrt[12]{125}$

بما أن $125<256$ فإن $\sqrt[12]{125}<\sqrt[12]{256}$ و منه $y<x$

ج. اجعل مقام العدد التالي جذريا: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}=\frac{1}{\dfrac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-1^3}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4}+1^2}}=\frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4}+1^2}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-1^3}=\frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4}+1}{4-1}=\frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4}+1}{3}$$

د. خاصية:

لتكن f دالة و $n\in\mathbb{N}^*$

- إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$
- إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و $l\geq0$ فإن : $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$
- إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

أمثلة :

1. لنحسب $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2+x-1}$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}x^2+x-1=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ إذن : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2+x-1}=+\infty$

2. لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8x}{x+1}}$:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{8x}{x}=8$ = $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{8x}{x+1}$ إذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8x}{x+1}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

3. لندرس اتصال الدالة : $h:x\mapsto\sqrt[3]{x^2}$

لدينا : $f:x\mapsto x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f(x)\geq0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

إذن الدالة $h=\sqrt[3]{f}$ متصلة على $\mathbb{R}$

9) القوى الجدرية لعدد حقيقي:

أ. تعريف :

ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$ و $x>0$ لدينا :

$$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$$

أمثلة :

- $5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}$
- $4^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{4^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt[2]{4^5}}=\dfrac{1}{\sqrt[2]{2^{10}}}=\dfrac{1}{2^{10}}$

ب. خاصية :

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$:

- $x^{r+r'}=x^r x^{r'}$
- $x^r.y^r=(x.y)^r$
- $(x^r)^{r'}=x^{r.r'}$
- $\dfrac{1}{x^r}=x^{-r}$
- $\dfrac{x^r}{y^r}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^r$
- $\dfrac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$

مثال :

لنبسط العدد $A=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt{2}\times\sqrt[12]{64}}$

$$A=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}}\times\sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt{2}\times\sqrt[12]{64}}=\frac{\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(32^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\times 64^{\frac{1}{12}}}=\frac{8^{\frac{1}{6}}\times 32^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}\times 64^{\frac{1}{12}}}=\frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}\times\left(2^5\right)^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}\times\left(2^6\right)^{\frac{1}{12}}}=\frac{2^{\frac{3}{6}}\times 2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{6}{12}}}=\frac{\cancel{2^{\frac{1}{2}}}\times 2^{\frac{5}{8}}}{\cancel{2^{\frac{1}{2}}}\times 2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{5}{8}-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{2}$$

つづく