2 النهايات والاتصال

من إنجاز : الأستاذ عادل بناجي

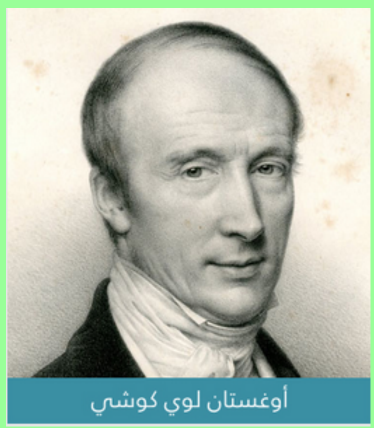
نبذة عن عالم

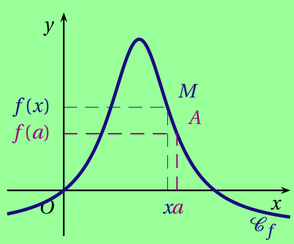
عرف القرن التاسع عشر اهتماما واسعا بالدّقة الرياضية المؤدية إلى تحديد المفاهيم الأساسية للتحليل . و كان عالم الرياضيات و الفيزياء الفرنسي أوغستان لوي كوشي (1789 – 1857م) *Augustin – Louis Cauchy* من بين رموز هذا التوجه .

دخل كوشي مدرسة الهندسة (مدرسة الجسور و الطرق) وأشرف عليه بيير جيرارد *Pierre Girard* في مشروع قناة *Ourcq* ، وأسهم في انشاء ميناء بحري في شيربوغ عام 1810.

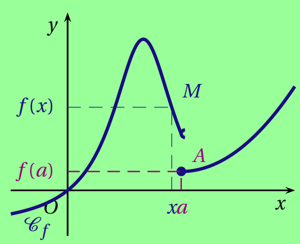
تميز كوشي بأعماله في الرياضيات ، وحلّ مجموعة مسائل تحد طرح عليه لاغرانج *Lagrange* ، و في عام 1814 نشر بحثا عن التكاملات المحدودة ، وعين كوشي في هذا العام أستاذا مساعدا في التحليل في مدرسة البوليتكنيك . درّس طرق التكامل في كلية العلوم ، ووضع تعاريف دقيقة للنهايات والاتصال و التكامل و لتقارب المتتاليات و المتسلسلات . و ساهم في تعريف الاتصال على مجال $[a,b]$.


جوزيف لوي لاغرانج


أوغستان لوي كوشي



f متصلة في a



f غير متصلة في a

La notion de continuité nous est familière : le temps s'écoule d'une manière continue , on ne passe pas brutalement de 12h à 12h01s , il n'y pas de saut .
C'est en ce sens que l'expression fonction continue est employée en mathématiques .

بطاقة تقنية رقم : 02

ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2015 – 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكلوريا علوم تجريبية درس : النهايات و الاتصال التذبير الزمني : 15 ساعة

فقرات الدرس	1 مبرهنة القيم الوسطية 2 الدالة العكسية لدالة متصلة 3 دالة الجذر من الرتبة n 4 الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال 5 العمليات على الدوال المتصلة 6 صورة مجال بدالة متصلة
المكتسبات القبلية	• عموميات حول الدوال العددية • دراسة الدوال العددية • مفاهيم أساسية في درس النهايات و الاشتقاق
الكفاءات المستهدفة	• تحديد صورة قطعة أو مجال بدالة متصلة و بدالة متصلة و رتيبة قطعا ؛ • تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير...؛ • استعمال طريقة التفرع الثنائي $(ladichotomie)$ في تحديد قيم مقربة لحلول المعادلة أو لتأطير هذه الحلول ؛ • تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية و مبرهنة الدالة التقابلية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال ؛
التوجيهات التربوية	• يتم اعتماد التعريف التالي : نقول إن دالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ؛ • نقبل النتائج المتعلقة باتصال الدوال الحدودية والجذرية و الدوال المثلثية والدالة جذر مربع ويتم التركيز على تطبيقاتها ؛ • نقبل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة وأن صورة مجال بدالة متصلة هي مجال ثم نستنتج مبرهنة القيم الوسطية ؛ • نقبل خاصيات العمليات على الدوال المتصلة و اتصال مركب دالتين .
الوسائل الديداكتيكية	سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛

النهايات

نشاط

...

1 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty} 27x^7 - x^3 - 4x \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 - 3x^3 + x \qquad \lim_{x\to+\infty} 2x^2-5x^3-x^5-3 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x^5 - 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4-4x}{8x^4+2x^3} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{27x^7-x^3}{11x^5-2x^2-15}$$

2 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to3^+} \frac{-5x-3}{-3x^2+11x-6} \qquad \lim_{x\to-4^+} \frac{x^2+x-4}{x^2+6x+8} \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+4}{x+2} \qquad \lim_{x\to3^+} \frac{20-x^3}{11x-2x^2-15}$$

$$\lim_{x\to3^-} \frac{-5x-3}{-3x^2+11x-6} \qquad \lim_{x\to-4^-} \frac{x^2+x-4}{x^2+6x+8} \qquad \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+4}{x+2} \qquad \lim_{x\to3^-} \frac{20-x^3}{11x-2x^2-15}$$

3 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to-\sqrt{5}} \frac{x+\sqrt{5}}{5-x^2} \qquad \lim_{x\to3} \frac{27-x^3}{11x-2x^2-15} \qquad \lim_{x\to0} \frac{x^2-3x^3+x}{2x-x^2}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} \qquad \lim_{x\to-1} \frac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3} \qquad \lim_{x\to5} \frac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$$

4 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x} \qquad \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} \qquad \lim_{x\to25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} \qquad \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

5 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{7x-9} + 8x^5 - 4x^3 + 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} -4x^2 - 1 - 12x + \sqrt{4x+7} \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2-4x+7} - 3x + 8$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{-9x-4} - 8x^2 - 3x - 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 - \sqrt{8x-3} + 2x^4 - 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2-6x-2} - x + 12$$

الأشكال غير محددة

الأشكال غير المحددة هي : $"+\infty-\infty"$ $"0\times\infty"$ $"\frac{\infty}{\infty}"$ $"\frac{0}{0}"$

خاصيات النهايات

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x|} = +\infty$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 6\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 6\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to 6\infty}\frac{1}{x^3}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=0$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في 0

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^3}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^3}=-\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty$$

خاصية

نهايات الدوال الجذرية والحدودية

1 نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

2 نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

خاصية

نهايات الدوال المثلثية

$$\lim_{x\to0}\frac{sin(x)}{x}=1 \qquad (a\neq0);\ \lim_{x\to0}\frac{sin(ax)}{x}=a \qquad \lim_{x\to0}\frac{tan(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

خاصية

النهايات و الترتيب

$$\begin{cases}g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\\ \lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=l\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l$$

$$\begin{cases}f(x)\leqslant g(x)\\ \lim_{x\to a}g(x)=l'\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l$$

$$\begin{cases}|f(x)-l|\leqslant u(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=l\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l$$

$$\begin{cases}0<f(x)\leqslant u(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=0$$

$$\begin{cases}f(x)\leqslant u(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=-\infty\end{cases}\quad\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$$

$$\begin{cases}u(x)\leqslant f(x)\\ \lim_{x\to a}u(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$$

الاتصال

1 الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال

1.1 الاتصال في نقطة

نشاط

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$

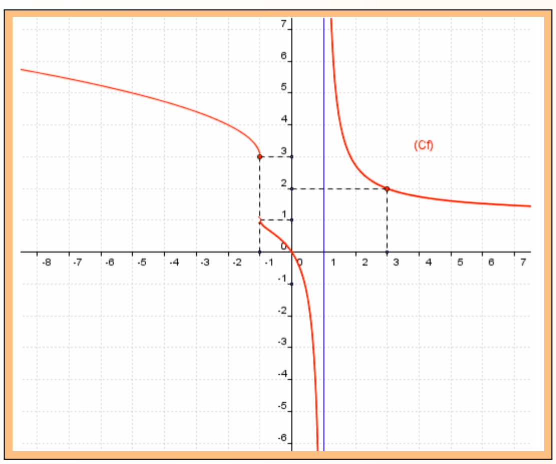
1 حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2 أحسب $\lim_{x\to 2} f(x)$

3 أنشئ التمثيل المبياني للدالة f

نلاحظ أن $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ نقول إن الدالة f متصلة في 2

نشاط



لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الشكل جانبه) .

1 من خلال الشكل كيف ترى المنحنى C_f عند النقطة ذات الأفصول -1 ثم عند النقطة ذات الأفصول 3

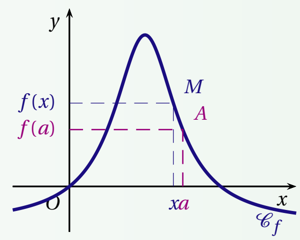
2 أ. أوجد مبيانيا $\lim_{x\to 3} f(x)$ و $f(3)$. ماذا تستنتج ؟

ب. أوجد مبيانيا $f(-1)$ ونهاية f عند -1 . ماذا تستنتج ؟

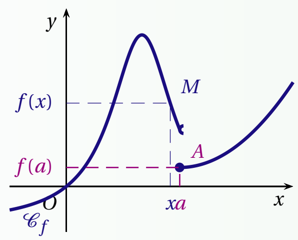
ذ. عادل بناجي

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كان : $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$



f متصلة في a



f غير متصلة في a

مثال

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(2) = 4 \end{cases}$ لنبين أن f متصلة في 1 .

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} 2(x-1) \\ &= 4 = f(2) \end{aligned}$$

✌ بما أن $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ فإن f متصلة في 1 .

ملاحظة

إذا كانت f غير متصلة في a فإننا نقول إن f غير متصلة (أو منقصلة) في a .

تمرين تطبيقي

...

1 نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} & ;x\neq 3 \\ f(3)=6 \end{cases}$ بين أن f متصلة في 3 .

2 نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ;x\neq 1 \\ f(1)=3 \end{cases}$ هل f متصلة في 1 ؟

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2} & ;x\neq 2 \\ f(2)=a & ;a\in\mathbb{R} \end{cases}$ حدد قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون f متصلة في 2 .

2.1 الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a,a+\alpha[$ حيث $(\alpha>0)$ تكون f متصلة على اليمين في a إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)}$$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha,a]$ حيث $(\alpha>0)$ تكون f متصلة على اليسار في a إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)}$$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كانت متصلة على اليمين ومتصلة على اليسار في a أي : $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)}$

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+3} & ; x>1 \\ f(x)=x+1 & ; x\leqslant 1 \end{cases}$

1 أدرس اتصال f على اليمين وعلى اليسار في 1

2 هل الدالة f متصلة في 1 ؟

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & ; x>2 \\ f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & ; x\leqslant 2 \end{cases}$

1 أحسب $f(2)$

2 أدرس اتصال f في 2

3.1 الاتصال على مجال

تعريف

...

- تكون الدالة f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$
- تكون الدالة f متصلة على المجال المغلق $[a,b]$ إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ومتصلة في a^+ و b^-

ملاحظات

...

- نعرف بالمثل الاتصال على المجالات $[a,b[$ و $]a,b]$ و $[a,+\infty[$ و $]-\infty,b]$ ...
- التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a,b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتان $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$

مثال

دالة الجزء الصحيح

↩ دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي نرمز لها ب E و التي تحقق : $E(x)=n$ إذا كان $n \leqslant x < n+1$ (حيث $n \in \mathbb{Z}$)

↩ مثلا :

- $E(3,5)=3$ لأن $3 \leqslant 3,5 < 3+1$
- $E(5)=5$ لأن $5 \leqslant 5 < 5+1$
- $E(-2,4)=-3$ لأن $-3 \leqslant -2,4 < -3+1$
- $E(\sqrt{5})=2$ لأن $4 \leqslant 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} \leqslant \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 \leqslant \sqrt{5} < 3$

1 مثل مبيانيا الدالة E على المجال $[0,4[$

2 أدرس اتصال الدالة E على المجالات $[0,1[$ ، $[0,2[$ ، $]1,2[$ ، $]1,3[$ و $[3,3.5]$

خاصية

...

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالتين $x \mapsto cos(x)$ و $x \mapsto sin(x)$ متصلتين على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto tan(x)$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

أمثلة

...

- الدالة $f(x)=x^3-4x^2+5x+7$ متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)
- الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ متصلة على $\mathbb{R}-\{1\}$ (لأنها دالة جذرية)
- الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ متصلة بالخصوص على المجالين $]-\infty,1[$ و $[3,+\infty[$ (لأنها $]-\infty,1[\subset\mathbb{R}-\{1\}$ و $[3,+\infty[\subset\mathbb{R}-\{1\}$)

4.1 قصور دالة عددية

تعريف

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J ضمن I بحيث $\forall x \in I\ f(x)=g(x)$ ، فإننا نقول إن الدالة g قصور الدالة f على المجال J .

نتيجة

إذا كانت الدالة f متصلة على I و g قصور الدالة f على المجال J فإن g متصلة على I

2 العمليات على الدوال المتصلة

خاصية

خاصية مقبولة

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عددا حقيقيا .

الدوال $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و (kf) و $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ $(\forall x \in I\ g(x) \neq 0)$ متصلة على I .

مثال

...

1. الدالة $x \mapsto x^2+\sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ (لأنها مجموع الدالتين $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$ المتصلتين على $\mathbb{R}^+$)
2. الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة على $]0,+\infty[$ (لأنها مقلوب الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0,+\infty[$ و لا تنعدم على $]0,+\infty[$)
3. الدالة $x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{x}+x^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$ (لأنهاخارج الدالة $x \mapsto x+2$ المتصلة على $]0,+\infty[$ و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}+x^2$ المتصلة على $]0,+\infty[$ و لا تنعدم على $]0,+\infty[$)

تمرين تطبيقي

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x)=2x+\sqrt{x}$ و $I=[0,+\infty[$
2. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$ و $I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0,+\infty[$
4. $f(x)=sin(x)+\sqrt{x}$ و $I=[0,+\infty[$
5. $f(x)=\frac{cos(x)}{x^2+1}$ و $I=\mathbb{R}$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $\begin{cases} f(x)=x+a & ;x<1 \\ f(x)=2x-3 & ;1\leqslant x\leqslant 3 \\ f(x)=bx+1 & ;x>3 \end{cases}$ حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

نشاط

نعتبر f و g الدالتين العدديتين المعرفتين ب : $f(x)=x^2+x+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1. دد الدالة $g\circ f$
2. ادرس اتصال f في 0 و اتصال g في $f(0)$
3. ادرس اتصال الدالة $g\circ f$ في 0

خاصية

اتصال مركب دالتين

لتكن f دالة متصلة على I و g دالة متصلة على J و $f(I)\subset J$
الدالة : $g\circ f$ متصلة على I .

مثال

لندرس اتصال الدالة f المعرفة ب : $f(x)=sin\left(\frac{3}{x}\right)$ على D_f

- لدينا $D_f=\mathbb{R}^*$
- نضع : $f(x)=h(g(x))$ بحيث $g(x)=\frac{3}{x}$ و $h(x)=sin(x)$

لدينا g دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ ؛ و h دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على $\mathbb{R}^*$ وبالتالي فإن f متصلة على $\mathbb{R}^*$ (لأنها مركب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^*$)

تمرين تطبيقي

...

1. باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x)=sin(x^3-3x+2)$ على $\mathbb{R}$
2. باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ على $[-1,1]$

ذ. عادل بناجي

نتائج

...

1 إذا كانت f دالة موجبة و متصلة على مجال I (أي $\forall x \in I : f(x) \geqslant 0$) فإن الدالة : $x \mapsto \sqrt{f}$ متصلة على المجال I

2 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto cos(f(x))$ متصلة على المجال I

3 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto sin(f(x))$ متصلة على المجال I

تمرين تطبيقي

...

1 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$ على المجال $]1, +\infty[$

2 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$ على $\mathbb{R}$

3 صورة مجال بدالة متصلة

1.3 صورة قطعة - صورة مجال

خاصية

خاصية مقبولة

...

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

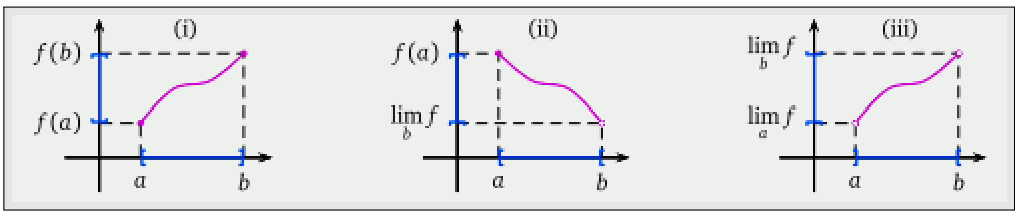
ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ فإن $f([a, b]) = [m, M]$ حيث : m هي القيمة الدنيا ل f على $[a, b]$ ، و M هي القيمة القصوى للدالة f على $[a, b]$

2.3 صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I لدينا النتائج التالية :

رتابة الدالة f	المجال I	المجال $f(I)$
f تزايدية قطعا على I	$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$
	$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$
	$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$
	$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$
f تناقصية قطعا على I	$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
	$[a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
	$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
	$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$



4 مبرهنة القيم الوسطية

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$

بما أن $f([a,b])=[m,M]$ فإن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان إلى القطعة $[m,M]$ و لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ لدينا $k\in[m,M]$. إذن : يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=k$

مبرهنة — مبرهنة القيم الوسطية

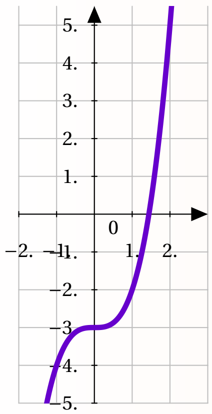
لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I .

لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث : $f(c)=k$

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=x^3-3$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

(أنظر الشكل جانبه).



1 بين أن f تزايدية و متصلة على $[0,2]$

2 أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم استنتج $f([0,2])$

3 بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,2]$

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)<0$ و $f(b)>0$ (أو $f(a)>0$ و $f(b)<0$) فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ و حسب مبرهنة القيم الوسطية فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث : $f(c)=0$.
العدد c هو حل المعادلة $f(x)=0$

نتيجة

...

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على اللاأقل حل في $]a,b[$
- إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على اللاأقل حل في $]a,b[$

تمرين تطبيقي

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x)=x^4+x^2+4x-1$
بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على اللاأقل حل في $[-1,1]$

تطبيقي تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x)=x^3+x^2+4x-1$

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

5 طريقة التفرع الثنائي

نشاط

نعتبر الدالة العددية : $f(x)=x^3+x+1$

1. بين أن f متصلة على $[0,1]$
2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 0 و 1
3. أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ وتحقق أن $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right]$
4. أحسب $f\left(\frac{3}{4}\right)$ وتحقق أن $\alpha\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$
5. أحسب $f\left(\frac{5}{8}\right)$ وتحقق أن $\alpha\in\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right]$
6. أحسب $f\left(\frac{11}{16}\right)$ واستنتج تأطيرا للعدد α
7. أحسب $f(0,682)$ و $f(0,683)$ واستنتج تأطيرا للعدد α سعته 10^{-3}

هناك بعض المعادلات من نوع $f(x)=0$ لا يمكن حلها جبريا ؛ لكن يمكن تحديد قيمة مقربة لحل هذه المعادلة وذلك باستعمال طريقة التفرع الثنائي .

طريقة

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)f(b)<0$ إذن يوجد عدد وحيد α حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

- إذا كان $f(a)f(\frac{a+b}{2})>0$ فإن $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$
نعيد هذه العملية بتعويض a ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تاطير سعته $\frac{b-a}{4}$ ...
- إذا كان $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$ فإن $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$
نعيد هذه العملية بتعويض b ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تاطير سعته $\frac{b-a}{4}$ ...

نعيد هذه العملية ككل إلى أن نحصل على التأطير المرغوب فيه

تطبيقي تمرين

بين أن المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$ ، ثم حدد تأطيرا للعدد α سعته $\frac{1}{8}$

6 الدالة العكسية لدالة متصلة

1.6 الدالة العكسية

نشاط

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=x^3+x^2+4x-1$

1. بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$
2. تحقق أن $f([0,+\infty[)\subset[-1,+\infty[$
3. بين أن كل عنصر y من $[-1,+\infty[$ يقبل سابق وحيد x من $[0,+\infty[$ و أن $x=\frac{1}{2}\sqrt{y+1}$

ملاحظة

...

- كل عنصر من $[0,+\infty[$ له صورة وحيدة في $[-1,+\infty[$ و كل عنصر من $[-1,+\infty[$ له سابق وحيد في $[0,+\infty[$
- نقول إن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $[-1,+\infty[$
- توجد دالة وحيدة يرمز لها ب f^{-1} معرفة على $[-1,+\infty[$ ب $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ وتسمى الدالة العكسية للدالة f

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن لكل عنصر y من $J=f(I)$ المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في I
نعبر عن هذا بقولنا f تقابل من I نحو J

تعريف

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و J مجال حيث $J=f(I)$ ، الدالة التي تربط كل عنصر y بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x)=y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f نرمز لها ب f^{-1}

نتائج

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية لدينا :

- $(\forall y\in J)\ (\exists! x\in I)\ : f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
- $(\forall x\in I)\ : (f^{-1}\circ f)(x)=x$
- $(\forall y\in J)\ : (f\circ f^{-1})(y)=y$

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\sqrt{x-1}$

1. بين أن f متصلة ورتيبة قطعا على $[1,+\infty[$
2. استنتج أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=x^2$

1. بين أن f تقابل من $I=[0,+\infty[$ نحو $J=[0,+\infty[$
2. حدد f^{-1} الدالة العكسية للدالة f
3. أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم $(\Delta): y=x$ والمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$. ماذا تلاحظ ؟

2.6 خاصيات الدالة العكسية

نشاط

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية :

- الدالة f^{-1} معرفة ومتصلة على $J=f(I)$
- الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على $J=f(I)$ و لها نفس منحى تغير الدالة f
- في المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة f^{-1} متماثل مع منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=x$

7 دالة الجذر من الرتبة n

خاصية

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ ب : $n\in\mathbb{N}^*$ $f(x)=x^n$

بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} على مجال J يجب تحديده .

نعلم أن الدالة $f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ متصلة وتزايدية قطعا على $I=[0,+\infty[$ إذن تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $J=f(I)=$ $[0,+\infty[$

خاصية و تعريف

...

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى دالة الجذر من الرتبة n
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب $f^{-1} = \sqrt[n]{}$
- نكتب $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ أو أيضا $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

ملاحظة

...

- حالة $n = 1$: $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$
- حالة $n = 2$: $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{2} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (الجذر مربع)
- حالة $n = 3$: $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{3} = x^{\frac{1}{3}}$ (الجذر مكعب)

خاصية

...

- $\sqrt[n]{0} = 0$ و $\sqrt[n]{1} = 1$
- $\sqrt[n]{x^n} = x$ $(\forall x \geqslant 0)$ و $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x})^n = +\infty$
- في معلم متعامد ممنظم $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ منحنى الدالة $f(x) = \sqrt[n]{x}$ مع $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للمنصف الأول (المستقيم) $((\Delta) : y = x)$

نتائج

...

- $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\forall b \in \mathbb{R}^+)\ :\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\forall b \in \mathbb{R}^+)\ :\ \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leqslant b$

مثال

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ ؛ $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

تمرين تطبيقي

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : $x^3 = 5$ ؛ $x^6 = -9$ ؛ $x^4 = 81$ ؛ $x^3 = -8$

خاصية

العمليات على الجذور من الرتبة n

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^+$ و m و n عنصرين من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

- $\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$: $(y\neq 0)$
- $(\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x}=\sqrt[nm]{x^m}$ و $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$

تمرين تطبيقي

أحسب وبسط العدد A حيث : $A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{9^5}}{\sqrt[3]{3}}$

1.7 القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب

تعريف

ليكن x عدد حقيقي موجب قطعا و r عددا جذريا غير منعدم حيث $r=\frac{p}{q}$ $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$

القوة الجذرية للعدد الحقيقي x ذات الأساس r هي العدد الحقيقي x^r و المعرفة بمايلي : $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[p]{x^q}$

مثال

$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ ؛ $\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$ ؛ $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

خاصية

ليكن r و r' عددين جذريين و a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا لدينا :

- $(a^r)^{r'}=a^{rr'}$
- $\frac{a^r}{b^{r'}}=a^{r-r'}$
- $a^r a^{r'}=a^{r+r'}$
- $a^r b^r=(ab)^r$
- $\frac{1}{a^r}=a^{-r}$
- $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$

تمرين تطبيقي

بسط العددين A و B حيث : $A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)$ ؛ $B=\frac{\sqrt[3]{7}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$

ذ. عادل بناجي