الاتصال و دراسة الدوال

تمرين 1

احسب

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{15x^3+7x+10}-\sqrt[3]{15x^3+1}$$

الحل:

$$A=\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}-\sqrt[3]{15x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+9}{\sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}^{\,2}+\sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}\sqrt[3]{15x^3+1}+\sqrt[3]{15x^3+1}^{\,2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(7+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{15+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^3}}^{\,2}+\sqrt[3]{15+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^3}}\sqrt[3]{15+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{15+\frac{1}{x^3}}^{\,2}\right)}$$

$$\boxed{A=\frac{7}{3\sqrt[3]{15}^{\,2}}}$$

تمرين 2

حدد D_f ثم بين أن f متصلة في x_0 :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-15}{x-3375} & x\neq 3375 \\ f(3375)=\dfrac{1}{675} \end{cases} \qquad x_0=3375$$

الحل التمرين 2:

$D_f=\mathbb{R}^{+}$

طريقة 1

$$\lim_{x\to 3375} f(x)=\lim_{x\to 3375}\frac{\sqrt[3]{x}-15}{x-3375}$$

$$=\lim_{x\to 3375}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^{\,2}+15\sqrt[3]{x}+225}$$

$$\lim_{x\to 3375} f(x)=\frac{1}{675}$$

بما أن : $f(3375)=\dfrac{1}{675}$

فإن : $\lim_{x\to 3375} f(x)=f(3375)$

إذن : f متصلة في 3375

طريقة 2 (العدد المشتق)

نعتبر : $g(x)=\sqrt[3]{x}$ متلة على $\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*}$

و $g'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^{\,2}}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^{*}$

نعتبر : $x_0=3375$, $g(3375)=15$ و

$$g'(3375)=\frac{1}{675}$$

$$\lim_{x\to 3375} f(x)=\lim_{x\to 3375}\frac{g(x)-g(3375)}{x-3375}$$

$$=g'(3375)$$

$$\lim_{x\to 3375} f(x)=\frac{1}{675}$$

بما أن : $f(3375)=\dfrac{1}{675}$

فإن : $\lim_{x\to 3375} f(x)=f(3375)$

إذن : f متصلة في 3375

تمرين3

$$f(x)=3x+\sqrt{2x-6}$$

حدد $I=D_f$

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

ب- استنتج أن المعادلة : $f(x)=10$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

حل التمرين 3:

أ - $I=D_f=[3,+\infty[$

f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $]3;+\infty[$ $\qquad (1)$

$$\forall x\in]3;+\infty[\qquad f'(x)=3+\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$$

بما أن : $f'(x)>0$ $\quad \forall x\in]3;+\infty[$

فإن : f تزايدية قطعا على $[3;+\infty[$ $\qquad (2)$

إذن : $f([3,+\infty[)=\left[f(3),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

و منه : $f([3,+\infty[)=[9,+\infty[$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

ليكن $x\in[9;+\infty[$ و $y\in[3;+\infty[$

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$

$$\Leftrightarrow 3y+\sqrt{2y-6}=x$$

$$\Leftrightarrow 2y-6=x^2+9y^2-6xy$$

$$\Leftrightarrow 9y^2-2y(3x+1)+(x^2+6)=0$$

$$9y^2 - 2y(3x+1) + (x^2+6) = 0$$
$$\Delta = 4(3x+1)^2 - 4(x^2+6)\times 9$$
$$\Delta = 4(6x-53)$$

بما أن : $x \geq 9$ فإن : $6x - 53 > 0$

$$y_1 = \frac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$$

أو $y_2 = \frac{3x+1+\sqrt{6x-53}}{9}$

بالنسبة ل $x = 9$ نجد : $y_1 = 3$ و $y_2 \neq 3$

بما أن : $f(3) = 9$ فإن : $f^{-1}(x) = y_1$

إذن : $f^{-1}(x) = \frac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$:

$\forall x \in [9;+\infty[$

و منه : $f^{-1} : \; [9;+\infty[\to [3;+\infty[$

$x \to \frac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$

ب- بما أن f متصلة و رتيبة قطعا على $[3;+\infty[$

و $f([3,+\infty[) = [9,+\infty[$ و $10 \in [9,+\infty[$

فإن : المعادلة : $f(x) = 10$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

تمرين4

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1} & x \in \left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[- \{1\} \\ f(1) = 12 \end{cases}$$

أ- بين أن f متصلة في 1

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق في 1

ج- احسب $f'(x)$

حل التمرين 4:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1} & x \in \left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[- \{1\} \\ f(1) = 12 \end{cases}$$

أ - لنبين أن : f متصلة في 1

نعتبر : $g(x) = \sqrt{13x^2-12} - x$ معرفة على $\left[\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[$

g متصلة على $\left[\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[$ قابلة للإشتقاق على $\left]\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[$

$$\forall x \in \left]\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[\; : \; g'(x) = \frac{13x}{\sqrt{13x^2-12}} - 1$$

$g(1) = 0$ و $g'(1) = 12$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$= g'(1)$$
$$\lim_{x\to1} f(x) = 12$$

إذن : $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

و منه : f متصلة في 1

ب- لنبين أن : f قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1} - 12}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{13x^2-12}-(13x-12)}{(x-1)^2}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{(13x^2-12)-(13x-12)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{-156x^2+312x-156}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{-156(x-1)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{-156}{\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \frac{-156}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -78}$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 1

و : $\boxed{f'(1) = -78}$

ج- $\forall x \in \left]\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[-\{1\}$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{\left(\frac{13x}{\sqrt{13x^2-12}}-1\right)(x-1)-\left(\sqrt{13x^2-12}-x\right)}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{13x^2-12}-13x+12}{(x-1)^2\sqrt{13x^2-12}}}$$

تمرين5

حلل هندسيا ما يلي :

أ - $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$

ب- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty$

ج- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

د- $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

حل اتمرين5

أ - $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$

(C_f) يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 3

ب- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

ج- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأعلى

د- $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .