ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

درس المعادلات التفاضلية:

خاصية 1: ليكن a عددا حقيقيا.

حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية: $y' = 4y$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{4x}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

خاصية 2: ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين.

حلول المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

مثال1: حل المعادلة التفاضلية: $(E): 2y' - 4y - 3 = 0$

الجواب: نكتبها أولا على الشكل: $y' = ay + b$

$2y' - 4y - 3 = 0$ يعني $2y' = 4y + 3$

يعني $y' = \frac{4y+3}{2}$ يعني $y' = 2y + \frac{3}{2}$ اذن: $a = 2$ و $b = \frac{3}{2}$

ومنه : حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{2x} - \frac{3}{4}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

خاصية3: لتكن المعادلة التفاضلية: $(E)\ y'' + ay' + by = 0$ و معادلتها المميزة $r^2 + ar + b = 0$ حيث a و b عددان حقيقيان

- إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2, فان حلول المعادلة تفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- إذا كانت للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج r_0, فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$, فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة $\mathbb{R}$ على بما يلي: $x \mapsto e^{px}(\alpha\cos qx + \beta\sin qx)$ حيث α و β عددان حقيقيان.

مثال1: 1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y'' - 7y' + 12y = 0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$.

أجوبة 1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي: $r^2 - 7r + 12 = 0$ ولدينا: $\Delta = 1$, إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: $r_1 = 3$ و $r_2 = 4$ و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$

نحسب : $f'(x)$: $f'(x) = (\alpha e^{4x} + \beta e^{3x})' = 4\alpha e^{4x} + 3\beta e^{3x}$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 4\alpha - 3\alpha = 1 \end{cases}$$

ومنه $\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$: $f(x) = e^{4x} - e^{3x}$

مثال2: 1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y'' - 2y' + y = 0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$.

أجوبة 1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي: $r^2 - 2r + 1 = 0$ ولدينا: $\Delta = 0$, إذن المعادلة المميزة تقبل حل حقيقي مزدوج r_0, هو: $r_0 = 1$

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{1x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ نحسب : $f'(x)$

$$f'(x) = ((\alpha x + \beta)e^x)' = ((\alpha x + \beta))' e^x + (\alpha x + \beta)(e^x)'$$

$$f'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

ومنه : $f(x) = (1x + 0)e^x$ يعني $f(x) = xe^x$

مثال3: حل المعادلة التفاضلية: $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$

الجواب : المعادلة المميزة : $r^2 + y + \frac{5}{2} = 0$

ولدينا: $\Delta = -9 = (3i)^2$, إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين وبعد الحساب

نجد : $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ ؛ $\overline{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ **ومنه:**

$$((\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)\ y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

حظ سعيد

الأستاذ : نجيب عثماني