أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مادة الرياضيات	الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم /10

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 10 في درس المعادلات التفاضلية

القدرات المنتظرة
- حل المعادلة : $y' = ay + b$
- حل المعادلة : $y''+ ay'+ by = 0$

I. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$:

نشاط: نعتبر المعادلة التالية : $(E): y' - 2 = 0$

1) هل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2x + 5$ حل للمعادلة (E)؟
2) ما هو الفرق بين معادلة عادية ومثل هذه المعادلات ؟
3) هل هناك أكثر من حل للمعادلة (E)؟

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.
المعادلة $y' = ay + b$, حيث المجهول هو دالة عددية y و y' مشتقتها, تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.
كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية $f'(x) = af(x) + b$, لكل x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$.

ملحوظة:
حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ يعني تحديد الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق هذه المعادلة.

خاصية: ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين.
حلول المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

مثال: حل المعادلة التفاضلية: $(E): 2y' - 4y - 3 = 0$

الجواب: نكتبها أولا على الشكل : $y' = ay + b$

$2y' - 4y - 3 = 0$ يعني $2y' = 4y + 3$

يعني $y' = \frac{4y+3}{2}$ يعني $y' = 2y + \frac{3}{2}$

اذن: $a = 2$ و $b = \frac{3}{2}$

ومنه : حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{2x} - \frac{3}{4}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

تمرين1: 1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): \frac{-1}{2}y' + 3y - 1 = 0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق : $f'(0) = -2$

الجواب: 1) نكتبها أولا على الشكل : $y' = ay + b$

$\frac{-1}{2}y' + 3y - 1 = 0$ يعني $y' = -6y + 2$

اذن: $a = -6$ و $b = 2$

ومنه : حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{-6x} + 3$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = ke^{-6x} + 3$

نحسب : $f'(x)$

$$f'(x) = \left(ke^{-6x} + 3\right)' = -6ke^{-6x}$$

$f'(0) = -2$ يعني $-6ke^{0} = -2$ يعني $k = \frac{1}{3}$

ومنه : $f(x) = \frac{1}{3}e^{-6x} + 3$

II. المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$:

$y'' + ay' + by = 0$ **معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية .**

$r^2 + ar + b = 0$ **معادلتها المميزة**

خاصية: لتكن المعادلة التفاضلية: $(E)\ y'' + ay' + by = 0$ و معادلتها المميزة $r^2 + ar + b = 0$ حيث a و b عددان حقيقيان.

- إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 , فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- إذا كانت للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج r_0 , فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- اذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$, فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال

المغرفة $\mathbb{R}$ على بما يلي: $x \mapsto e^{px}\left(\alpha\cos qx+\beta\sin qx\right)$
حيث α و β عددان حقيقيان.

مثال1:

1)حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-7y'+12y=0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

أجوبة (1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2-7r+12=0$$

لدينا: $\Delta=1$, إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: $r_1=3$ و $r_2=4$

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto \alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x)=\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$

نحسب: $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}\right)'=4\alpha e^{4x}+3\beta e^{3x}$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1\end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 4\alpha+3\beta=1\end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta=-\alpha \\ 4\alpha-3\alpha=1\end{cases}$$

$\begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha=1\end{cases}$ ومنه: $f(x)=e^{4x}-e^{3x}$

مثال2: (1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-2y'+y=0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

أجوبة (1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2-2r+1=0$$

لدينا: $\Delta=0$ اذن للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج $r_0=\dfrac{-b}{2a}=1$,

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto(\alpha x+\beta)e^{1x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x)=(\alpha x+\beta)e^{x}$

نحسب: $f'(x)$

$$f'(x)=\left((\alpha x+\beta)e^x\right)'=\left((\alpha x+\beta)\right)'e^x+(\alpha x+\beta)\left(e^x\right)'$$

$$f'(x)=(\alpha x+\alpha+\beta)e^x$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1\end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha+\beta=1\end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1\end{cases}$$

ومنه: $f(x)=(1x+0)e^x$ يعني $f(x)=xe^x$

مثال3 1)حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-4y'+13y=0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

أجوبة (1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2-4r+13=0$$

لدينا:, إذن المعادلة المميزة تقبل حل حقيقي مزدوج r_0, هو: $r_0=1$

لدينا: $\Delta=-36=(6i)^2$ إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين
مترافقين: $r_1=\dfrac{4+i6}{2}$ و $r_2=\dfrac{4-i6}{2}$ أي:
$r_1=2+3i=p+iq$ و $r_2=2-3i=p-iq$, ومنه حلول
المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة $\mathbb{R}$ على بما يلي:
$x\mapsto e^{2x}\left(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x\right)$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x)=e^{2x}\left(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x\right)$

نحسب: $f'(x)$

$$f'(x)=\left(e^{2x}\left(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x\right)\right)'$$

$$=\left(e^{2x}\right)'\left(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x\right)+e^{2x}\left(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x\right)'$$

$$=2e^{2x}\left(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x\right)+e^{2x}\left(-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x\right)$$

$$f'(x)=e^{2x}\left(2\alpha\cos 3x+2\beta\sin 3x-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x\right)$$

$$f'(x)=e^{2x}\left((2\alpha+3\beta)\cos 3x+(2\beta-3\alpha)\sin 3x\right)$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1\end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha=0 \\ 2\alpha+3\beta=1\end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

ومنه: $f(x)=e^{2x}\left(0\times\cos 3x+\dfrac{1}{3}\sin 3x\right)$ يعني

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x$$

تمرين2: حل المعادلة التفاضلية $y'=7y-5$ **بحيث :** $y(0)=-6$

الجواب : $y(x)=\lambda e^{7x}+\dfrac{5}{7}$ $\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

$y(0)=\lambda+\dfrac{5}{7}$ **ولدينا :** $y(0)=-6$ **إذن :** $\lambda+\dfrac{5}{7}=-6$

إذن : $\lambda=-\dfrac{47}{7}$ **و منه :** $\boxed{y(x)=-\dfrac{47}{7}e^{7x}+\dfrac{5}{7}}$

تمرين3: حل المعادلة التفاضلية $y''-15y'+56y=0$
بحيث : $y'(0)=9\ ;\ y(0)=-3$

الجواب : **المعادلة المميزة :** $r^2-15y+56=0$

نجد : $r_1=7$ و $r_2=8$

إذن : $y(x)=\alpha e^{7x}+\beta e^{8x}$

$$y'(x)=7\alpha e^{7x}+8e^{8x}$$

$\begin{cases} y(0)=\alpha+\beta \\ y'(0)=7\alpha+8\beta\end{cases}$ **و لدينا** $\begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=9\end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \alpha+\beta=-3 \\ 7\alpha+8\beta=9\end{cases}$ **نجد :** $\alpha=-33\ ;\ \beta=30$

و منه : $\boxed{y(x)=-33e^{7x}+30e^{8x}}$

تمرين4: حل المعادلة التفاضلية $y''+14y'+49y=0$
بحيث : $y'(0)=6\ ;\ y(0)=-3$

الجواب : **المعادلة المميزة :** $r^2+14y+49=0$

نجد : $r=-7$ **إذن :** $y(x)=(\alpha x+\beta)e^{-7x}$ $\left((\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$

$$y'(x)=\alpha e^{-7x}-7(\alpha x+\beta)e^{-7x}$$

$\begin{cases} y(0)=\beta \\ y'(0)=\alpha-7\beta \end{cases}$ **و لدينا** $\begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=6 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} \beta=-3 \\ \alpha-7\beta=6 \end{cases}$ **نجد :** $\alpha=-15\ ;\ \beta=-3$

و منه : $\boxed{y(x)=(-15x-3)e^{-7x}}$

تمرين5: حل المعادلة التفاضلية $y''+y'+\frac{5}{2}y=0$ **بحيث :**
$y'(0)=6\ ;\ y(0)=-4$

الجواب : **المعادلة المميزة :** $r^2+y+\frac{5}{2}=0$

نجد : $z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ ؛ $\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

$$y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)\quad\left((\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$$

$$y(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$
$$+\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$\begin{cases} y(0)=\alpha \\ y'(0)=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta \end{cases}$ **و لدينا** $\begin{cases} y(0)=-4 \\ y'(0)=6 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} \alpha=-4 \\ -\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta=6 \end{cases}$ **نجد :** $\alpha=-4\ ;\ \beta=\frac{8}{3}$

ومنه : $\boxed{y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)}$

تمارين غير محلولة

تمرين1 : نعتبر المعادلة التفاضلية : $2y'+4y+6=0$ (E)

1. حل المعادلة التفاضلية (E)
2. حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق الشرط : $f'(0)=2$

تمرين2 : نعتبر المعادلة التفاضلية : $\frac{1}{3}y'+2y-1=0$ (E)

1. حل المعادلة التفاضلية (E)
2. حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق الشرط : $f'(0)=-1$

تمرين3 : نعتبر المعادلة التفاضلية : $y''-5y'+6y=0$ (E)

1. حل المعادلة التفاضلية (E)
2. حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق الشرطين : $f(0)=2$ و $f'(0)=1$

تمرين4: حل المعادلة التفاضلية $(E):y''-2\sqrt{2}y'+2y=0$.
حدد الحل f للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطين $f(0)=1$ و $f'(0)=0$.

تمرين5 حل المعادلات التفاضلية التالية :

1) $y''+2y'+y=0$
2) $y''+4y'+8y=0$
3) $y''-4y'+2y=0$
4) $y''-4y'+4y=0$
5) $y''-4y=0$
6) $y''+16y=0$