المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.
هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.
يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u , z , f ....)
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هده الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هده المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

أ) $y'=0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $y(x)=1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة $y'=0$.

ب) $y'=x^2-1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x)=x^2-1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x\to x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\frac{1}{3}x^2-x+k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II – حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

1/ المعادلة التفاضلية y´=ay

* اذا كان $a=0$ فان $y'=0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$

* اذا كان $a\neq 0$

نعلم أن $(e^{ax})'=ae^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ادن $x\to e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y'-ay=0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y'-ay=0$ نضع $y(x)=z(x)e^{ax}$

ومنه $y'(x)=z'(x)e^{ax}+az(x)e^{ax}$

أي $y'(x)=z'(x)e^{ax}+ay(x)$ و بالتالي $y'(x)-ay(x)=z'(x)e^{ax}=0$

و منه $z'(x)=0$ و بالتالي $z(x)=\lambda$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x)=\lambda e^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a=0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y'=ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{ax}$
حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to y_0e^{a(x-x_0)}$
الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y'=2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

2- نحل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$

حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

2/ حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

اذا كان $a=0$ فان $y'=b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x)=bx+c$

اذا كان $a \neq 0$ فان $y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$

نضع $z = y + \frac{b}{a}$ و منه $z' = y'$

وبالتالي $y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az \Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقين حيث $a \neq 0$

المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \to \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$

حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay + b$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \to \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x \to \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0

1- المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0 حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

*- اذا كان $a = b = 0$ فان $y'' = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k;k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $x \to kx + k'$ بحيث $(k;k') \in \mathbb{R}^2$

*- اذا كان $b = 0$ فان $y'' + ay' = 0$

$y'' + ay' = 0 \Leftrightarrow (y')' + ay' = 0$ ومنه y' حل للمعادلة $z' + az = 0$

و بالتالي $y'(x) = \lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y'' + ay' = 0$ هي الدوال الأصلية $x \to \lambda e^{-ax}$

أي الدوال $x \to \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu \qquad (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$

3 – حل المعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = 0 \quad ; \quad (a;b) \neq (0;0)$

لنبحث عن حلول من نوع $y : x \to e^{rx} \quad r \in \mathbb{R};$

y حل للمعادلة $E \Leftrightarrow r^2 e^x + are^x + be^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = 0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

نشاط

1- أ/ حل المميزة للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0 \quad (E_1):$ و استنتج حلين للمعادلة (E_1)

ب/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \to \alpha e^{x} + \beta e^{-4x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

2- أ/ حل المميزة للمعادلة $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (E_2):$

ب/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \to (\alpha + \beta x)e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

3- أ/ حل المميزة للمعادلة $y''+4y'+13y=0 \quad (E_3):$

ب/ بين ان الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f: x \to e^{-2x}\cos 3x$ و $g: x \to e^{-2x}\sin 3x$ حلين للمعادلة التفاضلية (E_3)

ج/ بين ان الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x \to \alpha f+\beta g$ حل للمعادلة التفاضلية (E_1) حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E: $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b)\in\mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2+ar+b=0$ المعادلة المميزة

-* اذا كان $a^2-4b \succ 0$ فان المعادلة المميزة لها جدرين مختلفين $r_1 \quad ; \quad r_2$

و حلول المعادلة التفاضليةE هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1 x}+\beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

-* اذا كان $a^2-4b=0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to (\alpha+\beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

-* اذا كان $a^2-4b \prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha\cos qx+\beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$

الشرطان $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$ يسميان الشرطين البدئيين .

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

لدينا $\alpha\cos qx+\beta\sin qx = k\left(\frac{\alpha}{k}\cos qx+\frac{\beta}{k}\sin qx\right)=k(\cos\varphi\cos qx+\sin\varphi\sin qx)=k\cos(qx-\varphi)$

بوضع $k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad ; \quad \sin\varphi=\frac{\beta}{k} \quad ; \quad \cos\varphi=\frac{\alpha}{k}$

تستنتج اذا كان $a^2-4b \prec 0$ فان $x \to ke^{px}\cos(qx-\varphi)$ حيث k وφ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y''+2y'-\frac{5}{4}y=0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0)=1 \quad ; \quad y_1'(0)=-1$

2- حل المعادلة $y''+4y'+4y=0$

3- حل المعادلة $y''+2y'+5y=0$

حالات خاصة

-* اذا كان $a \succ 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \alpha\cos\sqrt{a}x+\beta\sin\sqrt{a}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

-* اذا كان $a \prec 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \alpha e^{\sqrt{-a}x}+\beta e^{-\sqrt{-a}x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y''+2y=0 \quad ; \quad y''-4y=0$

حلول المعادلة $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha\cos\sqrt{2}x+\beta\sin\sqrt{2}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

حلول المعادلة $y''-4y=0$ $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.