أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:المعادلات التفاضلية

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: نعتبر المعادلة التالية : $(E): y'-2=0$

1) هل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+5$ حل للمعادلة (E)؟

2) ما هو الفرق بين معادلة عادية ومثل هذه المعادلات ؟

3) هل هناك أكثر من حل للمعادلة (E)؟

الأجوبة: (1 $f(x)=2x+5$

الدالة عددية f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق المعادلة:

$(E): y'-2=0$

لأن: $f'(x)-2=0$

اذن: الدالة f هي حل للمعادلة (E)

2) الفرق بين معادلة عادية ومعادلة تفاضلية هوأن معادلة عادية المجهول فيها هو عدد ومعادلة تفاضلية المجهول فيها هو دالة عددية

3) هناك أكثر من حل للمعادلة (E) مثلا : $g(x)=2x+7$ أو : $h(x)=2x+100$ ..... $h(x)=2x+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

ملخص1: ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين.

حلول المعادلة التفاضلية: $y'=ay+b$ هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto ke^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

تمرين2: حل المعادلة التفاضلية: $(E): 2y'-4y-3=0$

الجواب: نكتبها أولا على الشكل : $y'=ay+b$

$2y'-4y-3=0$ يعني $2y'=4y+3$

يعني $y'=\frac{4y+3}{2}$ يعني $y'=2y+\frac{3}{2}$

اذن: $a=2$ و $b=\frac{3}{2}$

ومنه : حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto ke^{2x}-\frac{3}{4}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

تمرين3: 1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): \frac{1}{2}y'+3y-1=0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق :

$f'(0)=-2$

الجواب: (1 نكتبها أولا على الشكل : $y'=ay+b$

$\frac{1}{2}y'+3y-1=0$ يعني $y'=-6y+2$

اذن: $a=-6$ و $b=2$

ومنه : حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto ke^{-6x}+3$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

2) $f(x)=ke^{-6x}+3$

نحسب : $f'(x)$

$$f'(x)=\left(ke^{-6x}+3\right)'=-6ke^{-6x}$$

$f'(0)=-2$ يعني $-6ke^{0}=-2$ يعني $k=\frac{1}{3}$

ومنه : $f(x)=\frac{1}{3}e^{-6x}+3$

ملخص2: لتكن المعادلة التفاضلية: $(E)\ y''+ay'+by=0$ و معادلتها المميزة $r^2+ar+b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان.

- إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2, فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- إذا كانت للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج r_0, فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة على $\mathbb{R}$ على بما يلي: $x\mapsto(\alpha x+\beta)e^{r_0x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.
- اذ كانت المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$, فان حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة على $\mathbb{R}$ على بما يلي: $x\mapsto e^{px}(\alpha\cos qx+\beta\sin qx)$ حيث α و β عددان حقيقيان.

تمرين4: 1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-7y'+12y=0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

أجوبة (1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$r^2-7r+12=0$

لدينا: $\Delta=1$, إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: $r_1=3$ و $r_2=4$

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto \alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x)=\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$

نحسب : $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}\right)'=4\alpha e^{4x}+3\beta e^{3x}$$

$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 4\alpha+3\beta=1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \beta=-\alpha \\ 4\alpha-3\alpha=1 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha=1 \end{cases}$ ومنه : $f(x)=e^{4x}-e^{3x}$

تمرين5: 1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-2y'+y=0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

أجوبة 1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$r^2-2r+1=0$

لدينا: $\Delta=0$ اذن للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج

$r_0=\frac{-b}{2a}=1$,

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x\mapsto(\alpha x+\beta)e^{1x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x)=(\alpha x+\beta)e^x$

نحسب : $f'(x)$

$$f'(x)=((\alpha x+\beta)e^x)'=((\alpha x+\beta))'e^x+(\alpha x+\beta)(e^x)'$$

$$f'(x)=(\alpha x+\alpha+\beta)e^x$$

$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \beta=0 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases}$

ومنه : $f(x)=(1x+0)e^x$ يعني $f(x)=xe^x$

تمرين6: 1)حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-4y'+13y=0$

2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

أجوبة 1: المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$r^2-4r+13=0$

لدينا:, إذن المعادلة المميزة تقبل حل حقيقي مزدوج r_0

هو: $r_0=1$

لدينا: $\Delta=-36=(6i)^2$ إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين: $r_1=\frac{4+i6}{2}$ و $r_2=\frac{4-i6}{2}$ أي :

$r_1=2+3i=p+iq$ و $r_2=2-3i=p-iq$, ومنه حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المغرفة على $\mathbb{R}$ على بما يلي:

$x\mapsto e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)$ حيث α و β عددان حقيقيان.

2) $f(x)=e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)$

نحسب : $f'(x)$

$$f'(x)=(e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x))'$$

$$=(e^{2x})'(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)+e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)'$$

$$=2e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)+e^{2x}(-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x)$$

$$f'(x)=e^{2x}(2\alpha\cos 3x+2\beta\sin 3x-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x)$$

$$f'(x)=e^{2x}((2\alpha+3\beta)\cos 3x+(2\beta-3\alpha)\sin 3x)$$

$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \alpha=0 \\ 2\alpha+3\beta=1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=\frac{1}{3} \end{cases}$

ومنه : $f(x)=e^{2x}\left(0\times\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)$ يعني

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x$$

تمرين7: حل المعادلة التفاضلية $y'=7y-5$ بحيث :

$y(0)=-6$

الجواب : $y(x)=\lambda e^{7x}+\frac{5}{7}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

$y(0)=\lambda+\frac{5}{7}$ ولدينا : $y(0)=-6$ إذن :

$\lambda+\frac{5}{7}=-6$

إذن : $\lambda=-\frac{47}{7}$ و منه : $\boxed{y(x)=-\frac{47}{7}e^{7x}+\frac{5}{7}}$

تمرين8: حل المعادلة التفاضلية $y''-15y'+56y=0$

بحيث : $y(0)=-3$; $y'(0)=9$

الجواب : المعادلة المميزة : $r^2-15y+56=0$

نجد : $r_1=7$ و $r_2=8$

إذن : $y(x)=\alpha e^{7x}+\beta e^{8x}$

$y'(x)=7\alpha e^{7x}+8e^{8x}$

$\begin{cases} y(0)=\alpha+\beta \\ y'(0)=7\alpha+8\beta \end{cases}$ و لدينا $\begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=9 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \alpha+\beta=-3 \\ 7\alpha+8\beta=9 \end{cases}$ نجد : $\alpha=-33$; $\beta=30$

و منه : $\boxed{y(x)=-33e^{7x}+30e^{8x}}$

تمرين9: حل المعادلة التفاضلية $y''+14y'+49y=0$

بحيث : $y(0)=-3$; $y'(0)=6$

الجواب : المعادلة المميزة : $r^2+14y+49=0$

نجد : $r=-7$ إذن : $y(x)=(\alpha x+\beta)e^{-7x}$ $((\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)$

$y'(x)=\alpha e^{-7x}-7(\alpha x+\beta)e^{-7x}$

$\begin{cases} y(0)=\beta \\ y'(0)=\alpha-7\beta \end{cases}$ و لدينا $\begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=6 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha - 7\beta = 6 \end{cases}$ نجد : $\alpha = -15 \ ; \ \beta = -3$

و منه : $\boxed{y(x) = (-15x - 3)\, e^{-7x}}$

تمرين10: حل المعادلة التفاضلية $y'' + y' + \frac{5}{2} y = 0$ بحيث : $y'(0) = 6 \ ; \ y(0) = -4$

الجواب : المعادلة المميزة : $r^2 + y + \frac{5}{2} = 0$

نجد : $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i$ ؛ $\bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right) \quad \left((\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$$+\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\alpha \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases}$ و لدينا $\begin{cases} y(0) = -4 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} \alpha = -4 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases}$ نجد : $\alpha = -4 \ ; \ \beta = \frac{8}{3}$

ومنه : $\boxed{y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-4 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)}$