

## المتاليات العددية

## 2 ع ت

### 1. تعريف متتالية :

ليكن  $n_0$  عددا طبيعيا .

عندما نربط كل عدد صحيح طبيعي  $n_0 \leq n$  بعدد حقيقي وحيد  $u_n$

نقول إننا عرفنا متتالية عددية نرمز لها بالرمز  $(u_n)_{n \geq n_0}$  أو  $(u_n)$  .

العدد  $u_{n_0}$  يسمى الحد الأول للمتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  .

العدد  $u_n$  يسمى الحد العام للمتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  .

### تعريف: متتالية مكبورة - مصغورة - محدودة

$(u_n)_{n \geq n_0}$  مكبورة بالعدد  $M$  يكفي  $u_n \leq M$  لكل  $n_0 \leq n$  .

$(u_n)_{n \geq n_0}$  مصغورة بالعدد  $m$  يكفي  $u_n \geq m$  لكل  $n_0 \leq n$  .

$(u_n)_{n \geq n_0}$  محدودة يكفي أنها مكبورة ومصغورة

يكافي وجود عدد حقيقي موجب  $\alpha$  حيث  $|u_n| \leq \alpha$  لكل  $n_0 \leq n$

### رتابة متتالية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$  تزايدية يكفي  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  لكل  $n_0 \leq n$  .

$(u_n)_{n \geq n_0}$  تناقصية يكفي  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  لكل  $n_0 \leq n$  .

$(u_n)_{n \geq n_0}$  ثابتة يكفي  $u_{n+1} = u_n$  لكل  $n_0 \leq n$  .

كل متتالية تزايدية تكون مصغورة بعدها الأول .

كل متتالية تناقصية تكون مكبورة بعدها الأول .

### المتتالية الحسابية

نقول إن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي  $r$  ، غير مرتبط

بالعدد  $n$  ، حيث  $u_{n+1} - u_n = r$  لكل  $n_0 \leq n$  .

صيغة الحد العام :  $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$  لكل  $n_0 \leq n$  .

العلاقة بين حدين :  $u_n = u_p + (n - p)r$  لكل  $n_0 \leq p$  و  $n_0 \leq n$  .

صيغة المجموع :  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$  .

لكل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $[n_0; +\infty[$  حيث  $p \leq n$  .

### المتتالية الهندسية :

نقول إن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي  $q$  ، غير مرتبط

بالعدد  $n$  ، حيث  $u_{n+1} = q u_n$  لكل  $n_0 \leq n$  .

صيغة الحد العام :  $u_n = u_{n_0} \cdot q^{(n - n_0)}$  لكل  $n_0 \leq n$  .

العلاقة بين حدين :  $u_n = u_p \cdot q^{(n - p)}$  لكل  $n_0 \leq p$  و  $n_0 \leq n$  .

صيغة المجموع :  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n - p + 1}}{1 - q}$  .

مع  $q \neq 1$  لكل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $[n_0; +\infty[$  حيث  $p \leq n$  .

### نهاية متتالية :

نقول إن نهاية متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي عدد حقيقي  $l$  إذا كان كل مجال

مركزه  $l$  يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة .

نقول إن نهاية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي  $(+\infty)$  إذا كان كل مجال من النوع

$[a; +\infty[$  يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة

### تقارب متتالية :

نقول إن متتالية متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية .

كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة .

### مصاديق تقارب متتالية :

كل متتالية تزايدية ومكبورة تكون متقاربة .

كل متتالية تناقصية ومصغورة تكون متقاربة .

إذا كان :  $v_n < u_n < w_n$  ابتداء من عدد طبيعي  $n_0$

و  $\lim v_n = \lim w_n = l \in \mathbb{R}$

فإن :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تكون متقاربة و  $\lim u_n = l$

إذا كان :  $|u_n - l| < v_n$  ابتداء من عدد طبيعي  $n_0$  و  $\lim v_n = 0$

فإن :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة و  $\lim u_n = l$  .

إذا كان :  $u_n < v_n$  ابتداء من عدد طبيعي  $n_0$  و  $\lim v_n = -\infty$

فإن :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متباعدة و  $\lim u_n = -\infty$

إذا كان :  $v_n < u_n$  ابتداء من عدد طبيعي  $n_0$  و  $\lim v_n = +\infty$

فإن :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متباعدة و  $\lim u_n = +\infty$

تقارب المتتالية ذات الحد العام  $a^n$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  :

إذا كان  $-1 < a < 1$  فإن  $\lim a^n = 0$  .

إذا كان  $a = 1$  فإن  $\lim a^n = 1$  .

إذا كان  $a > 1$  فإن  $\lim a^n = +\infty$  .

إذا كان  $a \leq -1$  فإن : المتتالية  $(a^n)$  ليست لها نهاية .

تقارب المتتالية ذات الحد العام  $n^r$  حيث  $r \in \mathbb{Q}^*$  :

إذا كان  $r > 0$  فإن  $\lim_n n^r = +\infty$  .

إذا كان  $r < 0$  : فإن  $\lim_n n^r = 0$  .

### نهاية متتالية ترجعية :

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  بحيث :  $f(I) \subset I$  و  $u_0$  عنصرا من  $I$  .

نعتبر المتتالية المعرفة بعدها الأول  $u_0$  وبالعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  لكل  $n$

إذا كانت  $(u_n)$  متقاربة فإن نهايتها  $l$  تحقق أن  $f(l) = l$  .

نهاية المتتالية :  $v_n = f(u_n)$

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية متقاربة نحو عدد  $l$  و  $f$  دالة متصلة في  $l$

فإن المتتالية  $(v_n)$  تكون متقاربة نحو  $f(l)$

