السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $u_0=1\ ;\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n^2+5}\ \ ;n\geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN \quad u_n>0$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=1$ و $1>0$
- نفترض أن $u_n>0$ ونبين أن $u_{n+1}>0$

لدينا : $u_n>0 \Rightarrow \dfrac{u_n}{n^2+5}>0 \Rightarrow u_{n+1}>0$ ، بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>0}$

2

لنبين أن $\forall n\in IN \quad u_{n+1}\leq\dfrac{1}{5}u_n$

لدينا : $u_{n+1}-\dfrac{1}{5}u_n=\dfrac{u_n}{n^2+5}-\dfrac{1}{5}u_n=u_n\left(\dfrac{1}{n^2+5}-\dfrac{1}{5}\right)=u_n\left(\dfrac{5-n^2-5}{5(n^2+5)}\right)=\dfrac{-n^2u_n}{5(n^2+5)}<0$ (لأن $u_n>0$)

يمكن بسهولة و باستعمال التأطير إثبات المتفاوتة المطلوبة، لكن الطريقة المستعملة تعتبر أفضل لكونها أعم، إذ في بعض الحالات يكون حساب الفرق و تحديد إشارته الطريقة الوحيدة

3

لنبين أن : $\forall n\in IN^* \quad 0\leq u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ ، المتفاوتة $0\leq u_n$ سبق إثباتها في السؤال الأول

طريقة 1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN^* \quad u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة لأن : $u_1=\dfrac{u_0}{0+5}=\dfrac{1}{5}$ و $\dfrac{1}{5}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^1$
- نفترض أن $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ و نبين أن $u_{n+1}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

لدينا $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ إذن : $\dfrac{1}{5}u_n\leq\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

أي $\dfrac{1}{5}u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

و نعلم أن: $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{5}u_n$ (حسب السؤال السابق)

إذن : $u_{n+1}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

طريقة 2

نعلم أن: $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{5}u_n$ (حسب السؤال السابق)

إذن : $\begin{cases} u_1\leq\dfrac{1}{5}u_0 \\ u_2\leq\dfrac{1}{5}u_1 \\ \ldots\leq\ldots \\ \ldots\leq\ldots \\ u_n\leq\dfrac{1}{5}u_{n-1} \end{cases}$

منه :

$$u_1\times u_2\times\ldots\times u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$$

منه : $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n u_0$ بالتالي : $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة و أيضا تحديد عدد المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

4

لدينا : $\forall n\in IN^* \quad 0\leq u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}0=0$

إذن حسب مصاديق التقارب : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=0$ بالتالي u_n متقاربة نهايتها 0.

لاحظ أننا قمنا أولا بحساب النهاية و هو ما أثبت مباشرة تقارب المتتالية، و ذلك لأن السؤال لم يحدد إجبارية إثبات التقارب أولا (واو العطف يمكنك من اختيار الترتيب الذي تريد)

تمرين 2 : $u_0=-3\ ;\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}\quad ; n\geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $u_n<4$ $\forall n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=-3$ و $-3<4$
- نفترض أن $u_n<4$ ونبين أن $u_{n+1}<4$

لدينا : $u_n<4 \Rightarrow u_n+12<16 \Rightarrow \sqrt{u_n+12}<4 \Rightarrow u_{n+1}<4$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n<4}$

2

لنبين أن $\forall n\in IN \quad 4-u_{n+1}\leq \dfrac{4-u_n}{4}$

لدينا : $4-u_{n+1}=4-\sqrt{u_n+12}=\dfrac{\left(4-\sqrt{u_n+12}\right)\left(4+\sqrt{u_n+12}\right)}{4+\sqrt{u_n+12}}=\dfrac{16-u_n-12}{4+\sqrt{u_n+12}}=\dfrac{1}{4+\sqrt{u_n+12}}(4-u_n)$

و لدينا : $\dfrac{1}{4+\sqrt{u_n+12}}\leq\dfrac{1}{4}$ إذن : $4-u_{n+1}\leq\dfrac{4-u_n}{4}$

استعمال الطرح أو الترجع في هذا السؤال لا يسمح بالبرهان بسهولة و ذلك لصعوبة التخلص من الجذر مربع ، لذلك استعملنا المرافق

3

نعلم أن: $\forall n\in IN \quad 0<4-u_{n+1}\leq\dfrac{4-u_n}{4}$ (حسب السؤال السابق) إذن :

$$\begin{cases} 0<4-u_1\leq\dfrac{4-u_0}{4}\\ 0<4-u_2\leq\dfrac{4-u_1}{4}\\ \ldots\leq\ldots\\ \ldots\leq\ldots\\ 0<4-u_n\leq\dfrac{4-u_{n-1}}{4}\end{cases}$$

منه : $0<(4-u_1)\times(4-u_2)\times\ldots\times(4-u_n)\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n(4-u_0)\times(4-u_1)\times\ldots\times(4-u_{n-1})$

منه : $0<4-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n(4-u_0)$ منه : $0<4-u_n\leq7\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ منه : $4-7\left(\dfrac{1}{4}\right)^n<u_n\leq4$

و بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}4-7\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=4-0=4$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}4=4$ فإن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=4$

لاحظ أن فكرة حل التمرين تم التطرق إليها في التمرين السابق.

تمرين 3 : $u_0=4\ ;\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}\quad ; n\geq0$

1

لنبين بالترجع أن: $u_n>3$ $\forall n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=4$ و $4>3$
- نفترض أن $u_n>3$ ونبين أن $u_{n+1}>3$

لدينا : $u_{n+1}-3=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}-3=\dfrac{2u_n^2-3-3u_n-6}{u_n+2}=\dfrac{2u_n^2-3u_n-9}{u_n+2}$

لنعمل الحدودية : $2t^2-3t-9$ ، محددتها هي : $\Delta=3^2-4\times2\times(-9)=9+72=81$

منه : $t_1=\dfrac{3+9}{4}=3$ و $t_1=\dfrac{3-9}{4}=\dfrac{-3}{2}$

منه : $2t^2-3t-9=2(t-t_1)(t-t_2)=2\left(t+\dfrac{3}{2}\right)(t-3)=(2t+3)(t-3)$

منه : $u_{n+1}-3=\dfrac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}$ و لدينا حسب الافتراض : $u_n>3$ أي $u_n-3>0$

	إذن: $u_{n+1}-3>0$ أي $u_{n+1}>3$ ،، بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>3}$	
2	لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}-u_n=\dfrac{2u_n^2-3-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\dfrac{u_n^2-2u_n-3}{u_n+2}$ لنعمل الحدودية : t^2-2t-3 ، محددتها هي : $\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$ منه : $t_1=\dfrac{2+4}{2}=3$ و $t_2=\dfrac{2-4}{2}=-1$ منه : $t^2-2t-3=1(t-t_1)(t-t_2)=(t+1)(t-3)$ منه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+2}>0$ (لأن : $u_n>3$) بالتالي u_n تزايدية قطعا	
	لاحظ من خلال هذا السؤال و السؤال السابق أهمية تعميل حدودية من الدرجة الثانية في تحديد إشارة فرق.	
3	$u_{n+1}-3-\dfrac{9}{5}(u_n-3)=\dfrac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}-\dfrac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\dfrac{2u_n+3}{u_n+2}-\dfrac{9}{5}\right)$ $u_{n+1}-3-\dfrac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\dfrac{10u_n+15-9u_n-18}{5(u_n+2)}\right)$ $u_{n+1}-3-\dfrac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\dfrac{u_n-3}{5(u_n+2)}\right)=\dfrac{(u_n-3)^2}{5(u_n+2)}>0$ بالتالي : $\forall n\in IN \quad u_{n+1}-3>\dfrac{9}{5}(u_n-3)$	
	لاحظ أن حساب الفرق و تحديد إشارة يعتبر من بين أهم طرق البرهان في مثل هذه الحالات.	
4	لنبين أن : $\forall n\in IN \quad u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$	

طريقة 1	طريقة 2
لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN \quad u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$ • بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : • $u_0=4$ و $\left(\dfrac{9}{5}\right)^0+3=1+3=4$ • نفترض أن $u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$ و نبين أن $u_{n+1}\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n+1}+3$ لدينا $u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$ إذن : $u_n-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$ أي $\dfrac{9}{5}(u_n-3)\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n+1}$ و نعلم أن: $u_{n+1}-3>\dfrac{9}{5}(u_n-3)$ (حسب السؤال السابق) إذن : $u_{n+1}-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n+1}$ أي : $u_{n+1}\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n+1}+3$	نعلم أن: $u_{n+1}-3>\dfrac{9}{5}(u_n-3)$ (حسب السؤال السابق) إذن : $\begin{cases} u_1-3\geq\dfrac{9}{5}(u_0-3) \\ u_2-3\geq\dfrac{9}{5}(u_1-3) \\ \ldots\geq\ldots \\ \ldots\geq\ldots \\ u_n-3\geq\dfrac{9}{5}(u_{n-1}-3) \end{cases}$ و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال نجد أن : $u_n-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n(u_0-3)$ أي $u_n-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$ بالتالي : $u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$

يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة و أيضا تحديد عدد المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة $\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$

5	لدينا : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{9}{5}\right)^n=+\infty$ (لأن : $\dfrac{9}{5}>1$) إذن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3=+\infty$ بالتالي و حسب مصاديق التقارب فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=+\infty}$ و هذا يعني أن u_n ليست متقاربة.

تمرين 4 : $u_0 = 1\ ;\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right)\quad ; n \geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n \in IN \quad 1 \leq u_n < 4$

- بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0 = 1$ و $1 \leq 1 < 4$
- نفترض أن $1 \leq u_n < 4$ و نبين أن $1 \leq u_{n+1} < 4$

لدينا :

$$1 \leq u_n < 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq u_n < 4 \\ 1 \leq \sqrt{u_n} < 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 1+1+2 \leq u_n + \sqrt{u_n} + 2 < 4+2+2$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq \frac{u_n + \sqrt{u_n} + 2}{2} < 4 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq u_{n+1} < 4$$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n \in IN \quad 1 \leq u_n < 4}$

2

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2 - 2u_n\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(-u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + \sqrt{u_n} + 2\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2 + t + 2$ ، محددتها هي : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

منه : $t_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1$ و $t_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2$

منه : $-t^2 + t + 2 = -1(t - t_1)(t - t_2) = -(t+1)(t-2) = (t+1)(2-t)$

منه : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 1\right)\left(2 - \sqrt{u_n}\right) > 0$ (لأن : $\sqrt{u_n} < 2$) بالتالي : u_n تزايدية قطعا

سؤال يتطلب التفكير ، لأنه من الصعب التعرف على الحدودية انطلاقا من الشكل $-u_n + \sqrt{u_n} + 2$

3

لنبين أن : $\forall n \in IN \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}\left(4 - u_n\right)$

المتفاوتة $0 \leq 4 - u_{n+1}$ سبق إثباته افي السؤال الأول ، لدينا :

$$4 - u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(8 - u_n - \sqrt{u_n} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(6 - u_n - \sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2 - \sqrt{u_n} + 6\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2 - t + 6$ ، محددتها هي : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25$

منه : $t_1 = \frac{1+5}{-2} = -3$ و $t_2 = \frac{1-5}{-2} = 2$

منه : $-t^2 - t + 6 = -1(t - t_1)(t - t_2) = -(t+3)(t-2) = (t+3)(2-t)$

منه : $4 - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 3\right)\left(2 - \sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} + 3\right) \times \frac{\left(2 - \sqrt{u_n}\right)\left(2 + \sqrt{u_n}\right)}{2 + \sqrt{u_n}} = \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{u_n} + 3\right)\left(4 - u_n\right)}{2 + \sqrt{u_n}}$

إذن :

$$\left(4 - u_{n+1}\right) - \frac{2}{3}\left(4 - u_n\right) = \left(4 - u_n\right)\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{u_n} + 3\right)}{2 + \sqrt{u_n}} - \frac{2}{3}\right]$$

$$\left(4 - u_{n+1}\right) - \frac{2}{3}\left(4 - u_n\right) = \left(4 - u_n\right)\left[\frac{3\sqrt{u_n} + 9 - 8 - 4\sqrt{u_n}}{6\left(2 + \sqrt{u_n}\right)}\right] = \left(4 - u_n\right)\left[\frac{1 - \sqrt{u_n}}{6\left(2 + \sqrt{u_n}\right)}\right] < 0$$

(لأن : $1 < \sqrt{u_n}$) بالتالي : $\forall n \in IN \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}\left(4 - u_n\right)$

سؤال أكثر صعوبة لكونه يتطلب زيادة على التعميل استخراج التعبير $4 - u_n$ من خلال استعمال المرافق

4

من أجل حساب النهاية سنؤطر u_n

نعلم أن: $0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)$ $\forall n\in IN$ (حسب السؤال السابق) إذن:

$$\begin{cases} 0<4-u_1<\frac{2}{3}(4-u_0) \\ 0<4-u_2<\frac{2}{3}(4-u_1) \\ \ldots<\ldots<\ldots \\ \ldots<\ldots<\ldots \\ 0<4-u_n<\frac{2}{3}(4-u_{n-1}) \end{cases}$$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال نجد أن: $0<4-u_n<\left(\frac{2}{3}\right)^n\times(4-u_0)$

منه: $0<4-u_n<3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ منه: $4-3\left(\frac{2}{3}\right)^n<u_n<4$

بما أن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 4-2\left(\frac{2}{3}\right)^n=4-0=4$ (لأن: $-1<\frac{2}{3}<1$) و حسب مصاديق التقارب فإن: $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=4}$

لاحظ أن فكرة حل السؤال سبق التطرق لها في تمارين سابقة، هذا يعني ضرورة الاستفادة مما سبق.

تمرين 5: $n\geq 0$; $u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1}$; $u_0=3$ ، $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ $\forall n\in IN$

1 لنبين بالترجع أن $u_n>2$ $\forall n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن: $u_0=3$ و $3>2$
- نفترض أن $u_n>2$ و نبين أن $u_{n+1}>2$

لدينا: $u_{n+1}-2=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2=\frac{5u_n-4-2u_n-2}{u_n+1}=\frac{3u_n-6}{u_n+1}=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}>0$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>2}$

2 $u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1}=\frac{-(u_n^2-4u_n+4)}{u_n+1}=\frac{-(u_n-2)^2}{u_n+1}<0$

بالتالي: (u_n) تناقصية.

3 بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فهي متقاربة، لتكن ℓ نهايتها أي $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=\ell$

بما أن: $u_n>2$ $\forall n\in IN$ فإن: $\ell\geq 2$ (لا نستطيع الاستنتاج أن $\ell>2$)

لدينا: $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in IN$ حيث $f(x)=\frac{5x-4}{x+1}$

بما أن: f متصلة على $[2;+\infty[$ و $f([2;+\infty[)\subset[2;+\infty[$

(لأن: $f(x)\geq-2$ $\Rightarrow$ $f(x)-2=\frac{5x-4}{x+1}-2=\frac{5x-4-2x-2}{x+1}=\frac{3x-6}{x+1}=\frac{3(x-2)}{x+1}\geq 0$ $\Rightarrow$ $x\geq 2$ (

فإن ℓ هو حل المعادلة: $\ell=f(\ell)$ منه: $\ell=\frac{5\ell-4}{\ell+1}$ منه: $\ell^2+\ell=5\ell-4$ منه: $\ell^2-4\ell+4=0$

منه: $(\ell-2)^2=0$ بالتالي: $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=\ell=2}$

لاحظ أن المتفاوتة $\ell\geq 2$ لم تفدنا في هذا السؤال، لكنها تكون ضرورية في حالات مشابهة لكوننا نحصل على أكثر من قيمة للعدد ℓ

4	أ)	لدينا : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4-2u_n-2}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n-2}$ $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{3u_n-6}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{3}{3(u_n-2)}=\frac{u_n-2}{3(u_n-2)}=\frac{1}{3}$ إذن v_n متتالية حسابية أساسها : $\boxed{r=\frac{1}{3}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{1}=1}$	
	ب)	حسب السؤال السابق لدينا : $v_n=v_0+r\,n=1+\frac{1}{3}n$ منه : $v_n=\frac{1}{u_n-2}\Rightarrow\frac{1}{v_n}=u_n-2\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}+2=\frac{1}{1+\frac{1}{3}n}+2$	
5		$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{3}n}+2=0+2=2}$	