المتتاليات

التمرين 1

تمرين :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) **تحقق أن لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$
2) **بين بالترجع لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n > 1$
3) **بين أن** (u_n) **تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة**
4) **نضع لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_n = u_n - 1$
   - أ. **باستعمال السؤال 1) بين أن** (v_n) **هندسية محددا أساسها و حدها الأول**
   - ب. **أكتب** v_n **بدلالة** n **ثم استنتج** u_n **بدلالة** n
   - ج. **أحسب** $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التصحيح

1) **ليكن** $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} - 1 \\ &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5-8}{8} \\ &= \frac{3}{8}u_n - \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{8}(u_n - 1) \end{aligned}$$

إذن نستنتج : لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$

(2

- **من أجل** $n=0$ **لدينا :** $u_0=2$ **إذن** $u_0>1$
- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$
  - ✓ **نفترض أن :** $u_n>1$
  - ✓ **و نبين أن :** $u_{n+1}>1$

حسب نتيجة السؤال 1) لدينا : $u_{n+1}-1=\frac{3}{8}(u_n-1)$

و حسب الإفتراض ، لدينا $u_n>1$

إذن $u_n-1>0$

إذن $\frac{3}{8}(u_n-1)>0$

و منه $u_{n+1}-1>0$ **أي** $u_{n+1}>1$

- **نستنتج : لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n>1$

(3

- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \frac{3}{8}u_n+\frac{5}{8}-u_n\\ &= \frac{3-8}{8}u_n+\frac{5}{8}\\ &= \frac{-5}{8}u_n+\frac{5}{8}\\ &= \frac{-5}{8}(u_n-1)\end{aligned}$$

حسب نتيجة السؤال 2) لدينا : $u_n>1$ **إذن** $u_n-1>0$ **و منه** $\frac{-5}{8}(u_n-1)<0$

و بالتالي لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1}-u_n<0$

نستنتج أن : (u_n) **تناقصية قطعا .**

- **بما أن** (u_n) **تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن** (u_n) **متقاربة.**

4) أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{3}{8}(u_n - 1) \\ &= \frac{3}{8} \times v_n \end{aligned}$$

إذن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_{n+1} = \frac{3}{8} \times v_n$

و منه المتتالية (v_n) **هندسية أساسها** $q = \frac{3}{8}$ **و حده الأول** v_0 **حيث :** $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

ب. ليكن $n \in \mathbb{N}$

- **لدينا :** $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{8}\right)^n$

إذن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$

- **لدينا :** $v_n = u_n - 1$ **إذن** $u_n = v_n + 1$

و منه لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1$

ج. بما أن $-1 < \frac{3}{8} < 1$ **فإن** $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1 = 1$

و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

المتتاليات

التمرين 2

تمرين :

نعتبر المتتاليةالعددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بما يلي :** $\begin{cases} u_0 = \dfrac{9}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 16}{u_n + 2} & (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) **بين بالترجع :** $u_n > 4$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
2) **أدرس رتابة** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **و استنتج أن** $u_n \leq \dfrac{9}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
3) **استنتج أن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متقاربة**
4) **لتكن** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المتتالية العددية المعرفة بما يلي :** $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 4}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$
   أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول**
   ب. أكتب v_n **بدلالة** n **و استنتج** u_n **بدلالة** n
   ج. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   د. نضع $w_n = \ln(u_n)$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

التصحيح

(1

- **من أجل** $n = 0$ **: لدينا** $u_0 = \dfrac{9}{2}$ **إذن** $u_0 > 4$

- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$ **:**
  - ✓ **نفترض أن :** $u_n > 4$
  - ✓ **و نبين أن :** $u_{n+1} > 4$

  لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-4 &= \frac{10u_n-16}{u_n+2}-4 \\ &= \frac{10u_n-16-4u_n-8}{u_n+2} \\ &= \frac{6u_n-24}{u_n+2} \\ &= \frac{6(u_n-4)}{u_n+2} \end{aligned}$$

حسب الإفتراض لدينا : $u_n > 4$ **إذن** $u_n - 4 > 0$ **و** $u_n + 2 > 0$ **و منه** $\frac{6(u_n-4)}{u_n+2} > 0$

إذن : $u_{n+1} - 4 > 0$ **و بالتالي :** $u_{n+1} > 4$

- **نستنتج : :** $u_n > 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) **ليكن** $n \in \mathbb{N}$ **:**

-

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{10u_n-16}{u_n+2}-u_n \\ &= \frac{10u_n-16-u_n^2-2u_n}{u_n+2} \\ &= \frac{-u_n^2+8u_n-16}{u_n+2} \\ &= \frac{-(u_n-4)^2}{u_n+2} \end{aligned}$$

بما أن $\frac{-(u_n-4)^2}{u_n+2} < 0$ **فإن** $u_{n+1} - u_n < 0$

إذن : $u_{n+1} < u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و منه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية قطعا**

- **بما أن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية فإن :** $u_n \leq u_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و منه $u_n \leq \frac{9}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) **بما أن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية و مصغورة (بالعدد 4) فإن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متقاربة**

4)

أ. **ليكن** $n\in\mathbb{N}$ **:**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-4} \\ &= \frac{\dfrac{10u_n-16}{u_n+2}}{\dfrac{6(u_n-4)}{u_n+2}} \\ &= \frac{10u_n-16}{6(u_n-4)} \\ &= \frac{5u_n-8}{3(u_n-4)} \end{aligned}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{5u_n-8}{3(u_n-4)}-\frac{u_n}{u_n-4}=\frac{5u_n-8-3u_n}{3(u_n-4)}=\frac{2u_n-8}{3(u_n-4)}=\frac{2(u_n-4)}{3(u_n-4)}=\frac{2}{3}$$

إذن $v_{n+1}-v_n=\frac{2}{3}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ **.**

و بالتالي المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **حسابية أساسها** $r=\frac{2}{3}$ **و حدها الأول** $v_0=\dfrac{u_0}{u_0-4}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}-4}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}}=9$

ب.

- **لدينا :** $v_n=v_0+nr$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

  إذن $v_n=9+\frac{2n}{3}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$ **:**

  لدينا :

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 4}$$
$$\Leftrightarrow (u_n - 4)v_n = u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n v_n - 4v_n = u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 4v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 4v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{4v_n}{v_n - 1}$$

إذن :

$$u_n = \frac{4\left(9+\frac{2n}{3}\right)}{\left(9+\frac{2n}{3}\right)-1} = \frac{36+\frac{8n}{3}}{8+\frac{2n}{3}} = \frac{108+8n}{24+2n}$$

نستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{54+4n}{12+n}$

ج. **لدينا :** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{54+4n}{12+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n}$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$$

د. **لدينا** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$ و الدالة ln متصلة في 4

إذن $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(4)$