التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=13$ و $U_{n+1}=\frac{1}{5}U_n+\frac{4}{5}$

1) بين أن $U_n>1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

4) نضع $V_n=U_n-1$ بين أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية و استنتج الحد العام U_n بدلالة n

5) أحسب بدلالة n الجمع $S=\sum_{k=0}^{k=n-1}U_k$

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0=-\frac{3}{4} \\ U_{n+1}=\frac{2U_n-1}{2U_n+5} \end{cases}$

1- بين أن $-1<U_n<-\frac{1}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3- نضع $V_n=\frac{2U_n+1}{U_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n\to+\infty}U_n$

ج- أحسب الجمع $S_n=V_0+V_1+V_2+....+V_{n-1}$ و الجداء $P_n=V_0V_1.......V_n$ بدلالة n

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=\frac{6U_n-4}{U_n+2} \end{cases}$

1- بين أن $U_n>2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3- نضع $V_n=\frac{2}{U_n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية و أحسب V_n بدلالة n

ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n\to+\infty}U_n$

ج- أحسب الجمع $S_n=V_0+V_1+V_2+....+V_{n-1}$

التمرين الرابع

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية بحيث : $U_0=3$ و $2U_{n+1}=U_n+n+2$

❖ أحسب U_1 وبين أن $U_n\geq n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و أحسب $\lim_{n\to+\infty}U_n$

❖ استنتج نهاية المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

❖ نضع $V_n = U_n - n$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية

ب- استنتج أن $U_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- أحسب بدلالة n الجمع $S = U_0 + U_1 + ... + U_n$

التمرين الخامس

$(U_n)_n$ متتالية معرفة بـ: $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{(3n+2)U_n}{6n+10}$

1) أحسب U_1 وبين أن $0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم استنتج رتابة المتتالية $(U_n)_n$

2) نضع $V_n = (3n+2)U_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و حدد أساسها

ب- حدد U_n بدلالة n ثم أحسب نهاية $(U_n)_{n\geq 1}$

التمرين السادس

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بنا يلي : $U_0 = \frac{5}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{2}{9}U_n^2 + 1$

1) بين أن $\frac{3}{2} < U_n < 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{9}(U_n - 3)(2U_n - 3)$ ثم أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة

4) أ- بين أن $U_{n+1} - 3 \leq \frac{8}{9}(U_n - 3)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $U_n - 3 \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين السابع

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^3}$ و $I = \left]0, \frac{1}{2}\right]$

1) أ- بين أن $f'(x) = \frac{4x(1-x^3)}{(x^3+1)^2}$ وأنجز جدول تغيرات f

ب- بين أن $f(I) \subset I$

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- ادرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ج- بين أنّ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثامن

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0 = -\dfrac{1}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{1-2U_n} \end{cases}$

ج- بين أنّ $U_n < 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3- نضع $V_n = 1 + \dfrac{1}{U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج- بين أنّ $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ج- أحسب $S = \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{1}{U_1} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{U_n}$ بدلالة

التمرين التاسع

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \dfrac{\left(1+\sqrt[3]{U_n}\right)^3}{8}$

2) أ- أحسب U_1 و بين أنّ $0 \le U_n \le 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

2) نضع $V_n = \sqrt[3]{U_n} - 1$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أنّ $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ و أحسب U_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ب- أحسب بدلالة n الجمع $S = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \sqrt[3]{U_k}$

التمرين العاشر

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية بحيث : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1} = (1-u_n)^2 + 1$

1) أ- بين أنّ $1 < u_n \le \dfrac{3}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أنّ $u_{n+1} - u_n = (2-u_n)(1-u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ و استنتج أنّ $(u_n)_n$ تناقصية

2) أ- بين أنّ $|u_{n+1} - 1| \le \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أنّ $|u_n - 1| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- استنتج أنّ $(u_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها