Suites numériques

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_0 = 3 \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n + 1}$$

1) بين أن $U_n > 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) أ- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة

3) نضع $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$

ب- حدد كل من V_n ثم U_n بدلالة n

و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ج- أحسب بدلالة n الجمع :

$$S = V_0 + V_1 + \dots\dots + V_{n-1}$$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_0 = \frac{1}{5} \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n + 1}$$

1) أ) تحقق أن $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن $0 < U_n < \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) تحقق أن $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1 - 2U_n)}{2U_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة

3) نضع $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $q = 6$

و أحسب V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(V_n)_n$ و $(W_n)_n$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}V_n^2 + 6} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{و} \quad W_n = 12 - V_n^2$$

1) بين أن $0 \le V_n \le 2\sqrt{3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن $(W_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3) نضع $S_n = W_0 + W_1 + \dots\dots\dots + W_n$

و $T_n = V_n^2 + V_n^2 + \dots\dots\dots + V_n^2$

أ- أحسب S_n بدلالة n

ب- بين أن $T_n = 12\left(n - 1 + \frac{1}{2^n}\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 3 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \quad \text{لكل عدد } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

1) بين بالترجع أن $u_n > 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

3) نضع $v_n = \frac{u_n + 3}{u - 2}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(v_n)_n$ متتالية حسابية أساسها

$r = \frac{5}{3}$ و حدد v_n بدلالة n

ب- بين أن $u_n = \frac{2n + 9}{n + 3}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج- تحقق أن $v_n = 1 + \frac{5}{u_n - 2}$

ثم أحسب بدلالة n الجمع

$$S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{1}{u_1 - 2} + \dots\dots + \frac{1}{u_n - 2}$$

التمرين الخامس

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية بحيث :

$$U_0 = \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{7U_n + 3}{2U_n + 6}$$

1) بين أن $U_n \ge \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) أ- بين أن $U_{n+1} - \frac{3}{2} \le \frac{4}{9}\left(U_n - \frac{3}{2}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $U_n - \frac{3}{2} \le \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) نضع $V_n = \frac{2U_n - 3}{U_n + 1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أكتب V_n بدلالة n

ب- ثم U_n بدلالة n وأحسب مرة ثانية النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$