المتتاليات العددية

تمرين1

لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\begin{cases} v_1=12 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}\end{cases} \qquad \begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}\end{cases} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

1- نضع $w_n=v_n-u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

أ- بين أن $(w_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية و أحسب w_n بدلالة n

ب- حدد $\lim w_n$

2-- أ- بين أن $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية تزايدية و أن $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية تناقصية

ب- بين أن $u_n \prec v_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ج- استنتج أن $(w_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متقاربتين

تمرين2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $\begin{cases}u_0=-1 \ ; \ u_1=1\\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+2}=u_{n+1}-\dfrac14 u_n\end{cases}$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث

$$a_n=u_{n+1}-\frac12 u_n \quad ; \quad b_n=2^n u_n$$

أ- بين أن (a_n) متتالية هندسية و أحسب a_n بدلالة n

ب- بين أن (b_n) متتالية حسابية و أحسب b_n بدلالة n

ج- استنتج u_n بدلالة n

3- أ- بين بالترجع $\left(\dfrac32\right)^n \ge n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2^n}$ ثم $\lim u_n$

تمرين3

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$u_0=\frac32 \qquad (\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=\frac{u_n^{\,2}+u_n}{u_n^{\,2}+1}$$

1) –بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n\succ 1$

2) أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

أ – بين أن لكل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_{n+1}-1\le\dfrac12(u_n-1)$

ب – استنتج : $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\prec u_n-1\le \left(\dfrac12\right)^{n+1}$

ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين4

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب :

$$u_1=\frac32 \qquad \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): u_{n+1}=\frac12\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$$

1) بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):\sqrt2\prec u_n\le\dfrac32$

2) بين أن (u_n) تناقصية قطعا و استنتج أن (u_n) متقاربة

3) أ. بين أن :

$$u_{n+1}-\sqrt2=\frac12\left(u_n-\sqrt2\right)+\frac1{u_n}-\frac1{\sqrt2} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

ب.استنتج : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): u_{n+1}-\sqrt2\prec\dfrac12\left(u_n-\sqrt2\right)$

ت. استنتج : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): 0\prec u_n-\sqrt2\prec\dfrac1{2^{n-1}}\left(u_1-\sqrt2\right)$

ث.استنتج $\lim u_n$

تمرين5

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=x^2+\dfrac34 x$

1) ضع جدول تغيرات f .

2) نعتبرالمجال $I=\left[0;\dfrac14\right]$ بين أن $f(I)=I$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$u_0=\frac15 \text{ و } (\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=u_n^{\,2}+\frac34 u_n$$

أ. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):0\le u_n\le\dfrac14$

ب. ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ت. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

تمرين6

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بـ $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$

1- بين أن $u_n\prec 2$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2- بين أن $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية تزايدية و استنتج أن $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية متقاربة .

3- استنتج $\lim u_n$

تمرين7

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}=u_n(u_n+1)\end{cases}$

1- أحسب u_1 ; u_2 .

2- بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

3- بين أن $u_{n+1}\succ 2u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ و استنتج $u_n\succ 3\times2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

4- أحسب $\lim u_n$

تمرين8

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ

$$u_0=-\frac54 \qquad u_{n+1}=(u_n+2)^2-2$$

1- بين أن $-2\prec u_n\prec -1$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

2- بين أن (u_n) متتالية تناقصية و استنتج أن (u_n) متقاربة .

4- أحسب $\lim u_n$.

تمرين9

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ

$$u_0=\frac{3}{2} \qquad u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$$

1- بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\prec u_n\prec 2$

2- تأكد أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$ ثم

استنتج أن (u_n) متتالية تزايدية.

3- أ- تأكد أن $\dfrac{1}{2+\sqrt{u_n+2}}\prec\dfrac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ثم بين أن

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad 2-u_{n+1}\prec\frac{2-u_n}{2}$$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\prec 2-u_n\prec\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثم

استنتج $\lim u_n$

تمرين10

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب: $u_1=1$ ولكل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=2u_n+\dfrac{n+2}{n(n+1)}$

1) - أحسب u_2 و u_3

2)- نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب:

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): v_n=u_n+\frac{1}{n}$$

أ - بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب – - أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

ج – هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة

تمرين11

I ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x)=3-\dfrac{9}{4x}$

1) ضع جدول تغيرات الدالة f .

2) نضع $I=\left]\dfrac{3}{2},3\right]$.

أ ـ بين أن : $f(I)\subset I$.

ب ـ بين أن : $(\forall x\in I)\ f(x)<x$

II ـ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n\in\mathbb{N}) \quad u_{n+1}=3-\dfrac{9}{4u_n}\end{cases}$$

1) أ رسم التمثيل المبياني للدالة f و المستقيم ذي المعادلة $y=x$. مثل على محور الأفاصيل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).

2) بين بالترجع أن : $\dfrac{3}{2}< u_n\le 3$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

4) نضع $v_n=\dfrac{2}{2u_n-3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ ـ بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددا أساسها و حدها الأول .

ب ـ أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

ج ـ أحسب من جديد $\lim u_n$.

تمرين12 (بعد درس الدوال اللوغاريتم و الاسية)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ (\forall n\in\mathbb{N}) \quad u_{n+1}=1+\sqrt[3]{u_n-1}\end{cases}$$

1. بين بالترجع أن : $1<u_n<2 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

2.

i. بين أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \quad u_{n+1}-u_n=\sqrt[3]{u_n-1}\left(1-\sqrt[3]{u_n-1}\right)\left(1+\sqrt[3]{u_n-1}\right)$$

ii. استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .

iii. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$v_n=\ln(u_n-1) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) .$$

i. تحقق أن $v_0=-\dfrac{1}{3}$ ثم بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها $\dfrac{1}{3}$.

ii. استنتج أن : $\ln(u_n-1)=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

iii. احسب u_n بدلالة n .