سلسلة تمارين حول المتتاليات العددية

تمرين1: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6 \ ; \forall n \geq 1 \end{cases}$.

1. أحسب u_2 و u_3.

لتكن $(v_n)_{n\geq1}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $v_n = u_n + 18$.

2. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
3. حدد v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب $\lim u_n$.

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_1 = \frac{11}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{4} \end{cases}$.

و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي: $v_n = -1 + 2u_n \quad ; \forall n \geq 1$.

1. أحسب v_1.
2. برهن أن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
3. عبر عن v_n و u_n بدلالة n.

تمرين3: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0; \qquad u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

برهن بالترجع أن: $\forall n \geq 0; \quad u_n = 3 - 2^n$.

تمرين4: نضع: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3.
2. برهن بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n \neq -1$.
3. نضع: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) بين أن متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

b) أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب: $\lim v_n$.

c) أحسب u_n بدلالة n ثم أحسب: $\lim u_n$.

تمرين5: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. بين أن: $\forall n \geq 0; \quad u_n \geq 2$.
2. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.
3. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.
4. أحسب $\lim u_n$.

تمرين6: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. أحسب u_2 و u_3.

2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_n = u_n -$ [illegible].
   أ. برهن أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
   ب. عبر عن v_n بدلالة n ثم عن u_n بدلالة n.
   ج. أحسب $\lim v_n$ ثم $\lim u_n$.

تمرين7: نعتبر المتتالية المعرفة كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 0 \;;\; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n \;;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ، و المتتالية المعرفة ب: $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$ ، و المتتالية المعرفة ب: $w_n = 5^n u_n \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

1. أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية.
   ب. أكتب v_n بدلالة n.
2. أ. بين أن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية.
   ب. أكتب w_n بدلالة n.
   ج. استنتج u_n بدلالة n.
3. أ. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad 0 < u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}u_n$.
   ب. استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad 0 < u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.
   ج. أحسب $\lim u_n$.

تمرين8: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \dfrac{u_n^{\,2}}{3}};\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. أحسب u_1.
2. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 \leq u_n < 2\sqrt{3}$.
3. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا. ماذا تستنتج ؟.
4. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب $\forall n \in \mathbb{N};\quad v_n = 12 - u_n^{\,2}$.
   أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
   ب. أكتب u_n بدلالة n و استنتج $\lim u_n$.

تمرين9: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي: $\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{7}} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{1+u_n^{\,3}}{8}};\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}}$.
2. بين أن: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ $\forall n \in \mathbb{N};$ ،ماذا تستنتج ؟
3. نضع: $\forall n \in \mathbb{N};\quad v_n = \dfrac{7}{8}u_n^{\,3} - \dfrac{1}{8}$.
   a) بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها.
   b) أحسب u_n بدلالة n.

c) أحسب $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k^{3}$ بدلالة n.

تمرين10: نعتبر المتتاليتين المعرفتين كالآتي:

$$\begin{cases} u_1=7 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4};\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_1=1 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3};\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}.$$

نضع: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad w_n=u_n-v_n$.

1. بين أن $(w_n)_{\forall n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية و حدد أساسها.
2. أكتب w_n بدلالة n.
3. أحسب $\lim w_n$.
4. أحسب $s_n=\sum_{k=1}^{n} w_k$ ، ثم حدد $\lim s_n$.
5. أكتب $u_{n+1}-u_n$ بدلالة w_n و استنتج u_{n+1} بدلالة n.

تمرين11:

1. أدرس تغيرات الدالة $f(x)=\dfrac{6x+5}{x+2}$ على $I=[1;5]$.
2. نعتبر المتتالية المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_o=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{6u_n+5}{u_n+2};n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

a) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

b) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N};\quad u_n<5)$.

c) استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب $\lim u_n$.

تمرين12:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]1,+\infty[$ ب : $g(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

1. بين أن: $\forall x\in]2.+\infty[;g(x)\geq 3$.
2. لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالتالي: $\begin{cases} u_0=\dfrac{7}{2} \\ u_{n+1}=g(u_n)\;;\quad \forall\in\mathbb{N} \end{cases}$.

a) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad u_n\geq 3$.

b) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبة و استنتج أنها متقاربة .

c) أحسب $\lim u_n$.