الثــــانية علوم تجريبية	المتتـــــــاليـــات العـــدديـــــــة	حمـــيد بوعيـــون

تمرين 1 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي

$u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{2u_n+7}$ و نضع $v_n=\frac{2u_n-1}{2u_n+6}$

1) a)بين أن $(\forall n\in IN);-3<u_n<\frac{1}{2}$. b)ادرس رتابة (u_n)

2) a) بين أن $(\forall n\in IN):u_{n+1}-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{8}(u_n-\frac{1}{2})$.

b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

3) a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

c) أحسب $S_n=v_0+v_1+............+v_n$ و $\lim S_n$.

d) أحسب $P_n=v_0.v_1..............v_n$

تمرين 2 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1}\end{cases}$ ونضع $v_n=\frac{1}{u_n-2}$

1) بين أن $(\forall n\in IN);u_n>2$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4) a) بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول.

b) أحسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

تمرين 3 نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{6x}{x^3+4}$

1)حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2)بين أن f تقابل من $\left[0,\sqrt[3]{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده.

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بـ : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

a) بين أن : $(\forall n\in IN):1\leq u_n<\sqrt[3]{2}$.

b) بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 4 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4$

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-3x+4$

a) بين أن $f([1,2])\subset[1,2]$.

b) بين أن $(\forall x\in IR):f(x)\geq x$.

c) استنتج أن $(\forall n\in IN):1\leq u_n\leq 2$ وأن (u_n) تناقصية .

d) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 5 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases}u_0=4\\ u_{n+1}=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}\end{cases}$

1) بين أن : $(\forall n\in IN):\ u_n>3$.

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) بين أن : $(\forall n\in IN):u_{n+1}-3>\frac{3}{2}(u_n-3)$.

4) استنتج أن $(\forall n \in IN): u_n \geq (\frac{3}{2})^n + 3$

5) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

تمرين 6 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}u_n^3 + 2}$

1) بين أن : $(\forall n \in IN): \ u_n \geq 1$ (2 ادرس رتابة (u_n)

3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي $v_n = u_n^3 - 3$

a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية

b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n

تمرين 7 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بما يلي: $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{(3n+3)u_n - 8n - 12}{n}$

1) بين أن $(\forall n \in IN^* - \{1\}): u_n \leq 0$. (2 ادرس رتابة (u_n)

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي $v_n = \frac{4 - u_n}{n}$.

a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

تمرين 8 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = -\frac{1}{3}$ و $u_{n+1} = 1 - \sqrt[3]{5 - 3u_n}$

1) بين أن $(\forall n \in IN): -1 < u_n < 0$. (2 ادرس رتابة (u_n)

2) a) استنتج أن : $(\forall n \in IN): 0 < u_n + 1 < (\frac{3}{4})^n . \frac{2}{3}$.

b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 9 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$

1) بين أن $(\forall n \in IN); 0 < u_n < 2$. (2 ادرس رتابة (u_n) .

3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4) a) بين أن $(\forall n \in IN): \ 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

b) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

5) نضع $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

a) بين أن : $(\forall n \in IN): \ S_n \geq 2n - 3 + 5(\frac{4}{5})^{n+1}$

b) واستنتج $\lim S_n$

تمرين 10 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$

1) بين أن $(\forall n \in IN); u_n > 2$. (2 ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

4) بين أن $(\forall n \in IN): u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$.

5) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 11 نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=(\sqrt{x+1}-1)^3$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) a) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]-1,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده . b) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0=-\frac{3}{4} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

a) بين : أن $(\forall n\in IN):-1<u_n<0$

b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

c) حل في $]-1,+\infty[$ المعادلة $f(x)=x$ (ضع $t=\sqrt{x+1}-1$)

d) بين أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

تمرين 12 نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{4x^2+4}$.

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1) a) ادرس تغيرات f على IR^+ .

b) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

c) بين أن $(\forall(x,y)\in[0,1]^2):|f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{2}|x-y|$.

2) بين أن $(\forall n\in IN):0<u_n\leq\frac{1}{2}$.

3) a) بين أن $(\forall n\in IN):|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

b) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ متقاربة واحسب نهايتها .

تمرين 13 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{6-u_n} \end{cases}$

1) ادرس تغيرات $f(x)=\sqrt{6-x}$ وحدد $f([0,6])$.

2) بين أن $(\forall n\in IN^*):0\leq u_n\leq 6$.

3) نضع $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$

بين أن $v_n\leq w_n$ $(\forall n\in IN)$ وأن (v_n) تزايدية و w_n تناقصية .

4) بين أن $(\forall n\in IN):|u_{n+1}-2|\leq\frac{1}{2}|u_n-2|$ واستنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

5) بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة .

تمرين 14 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $a>0:\begin{cases} u_0\geq\sqrt[3]{a} \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(2u_n+\frac{a}{u_n^2}) \end{cases}$

1) a) بين أن $(\forall n\in IN):u_n>0$.

b) بين أن $(\forall n\in IN):u_{n+1}-\sqrt[3]{a}=\frac{(2u_n+\sqrt[3]{a})}{3u_n^2}(u_n-\sqrt[3]{a})^2$

c) قارن بين $\sqrt[3]{a}$ و u_n وبين أن (u_n) متقاربة .

2) بين أن $u_{n+1}-\sqrt[3]{a}-\frac{2}{3}(u_n-\sqrt[3]{a})\leq 0$. واستنتج $\lim u_n$.

تمرين 15 لتكن $(x_n)_{n\in IN}$ متتالية متقاربة وتحقق $(\forall n\in IN): \frac{1}{2} < x_n < 1$

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + x_{n+1}}{1+u_n x_{n+1}} \end{cases}$

1) a) بين أن المتتالية (u_n) محدودة بـ 0 و 1 .

b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية واستنتج أن (u_n) متقاربة.

2) a) بين أن $(\forall n\in IN) : x_n(-1+u_n u_{n-1}) = u_{n-1} - u_n$

b) استنتج $\lim u_n$

تمرين 16 نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in IN}$ و $(v_n)_{n\in IN}$ المعرفتين بما يلي :

$\begin{cases} u_0 = a \quad , \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$ (مع $a < b$)

1) a) بين أن : $(\forall n\in IN):\ 0 < u_n < v_n$.

b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية .

c) استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان .

2) نضع $w_n = v_n - u_n$. و $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) بين أن المتتالية (w_n) هندسية و (t_n) ثابتة

b) احسب u_n و v_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim v_n$ و $\lim u_n$

تمرين 17 نعتبر المتتاليات (u_n) (v_n) و (w_n) المعرفة بما يلي :

$\begin{cases} u_0 = 20 \quad ; \quad u_1 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{20}u_n + \frac{1}{20}u_{n-1} \end{cases}$ $\begin{cases} v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \end{cases}$

1) بين أن (v_n) و (w_n) متتاليتين هندسيتين.

2) احسب w_n ; v_n ثم u_n بدلالة n . واحسب $\lim u_n$.

3) احسب $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$ بدلالة u_n واستنتج $\lim S_n$.

تمرين 18 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2)$

1) بين أن $(\forall n\in IN); 1 \le u_n < 4$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) a) بين أن $(\forall n\in IN):\ 0 < 4 - u_{n+1} \le \frac{3}{4}(4 - u_n)$.

b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 19 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + n^2) \end{cases}$

و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $(\forall n\in IN)\ :\ v_n = u_n - (\frac{n^2 - 3n + 3}{2})$

a) بين أن (v_n) متتالية هندسية حدد أساسها وحدها الأول .

b) احسب v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين 20 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3+2u_n} \end{cases}$

1) بين أن (u_n) موجبة وتناقصية .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $(\forall n \in IN): v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n}$

a) بين أن (v_n) متتالية هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

b) احسب v_n ثم u_n بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.

3) احسب بدلالة n $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}$.

تمرين 21 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12} \end{cases}$

ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = u_n^2 - 4$

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .

2) احسب v_n ثم u_n بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.

3) أحسب $S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_n$ بدلالة n .

تمرين 22 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases}$

1) بين أن $(\forall n \in IN): 1 < u_n \leq 2$.

2) a) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

b) بين أن (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim u_n$.

3) a) بين أن : $(\forall n \in IN): u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.

b) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين 23 نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$

1) بين أن $f([2,3]) \subset [2,3]$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة بـ : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4}{2u_n} \end{cases}$

a) بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2 .

b) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

c) بين أن (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim u_n$.

تمرين 24 نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{6x}{x^3 + 4}$

1)حدد مجموعة تعريف الدالة f.

2)بين أن f تقابل من $\left[0, \sqrt[3]{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده.

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) بين أن : $(\forall n \in IN): 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$.

b) بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 25 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ ونضع $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .

2) عبر عن v_n ثم عن u_n بدلالة n .

3) أحسب $\lim u_n$.

4) أحسب $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$ بدلالة n .