



.01

01. نعبّر بدلالة  $\ln 2$  و  $\ln 5$  عن ما يلي :  $\ln 1000$  ؛  $\ln \frac{8}{25}$  و  $\ln 0,16$  .

$$\bullet \ln 1000 = \ln(10)^3 = 3\ln(2 \times 5) = 3\ln 2 + 3\ln 5$$

$$\bullet \ln \frac{8}{25} = \ln \frac{2^3}{5^2} = 3\ln 2 - 2\ln 5$$

$$\bullet \ln 0,16 = \ln 16 \times 10^{-2} = \ln 16 - 2\ln 10 = \ln 2^4 - 2(\ln 2 + \ln 5) = 4\ln 2 - 2\ln 2 - 2\ln 5 = 2\ln 2 - 2\ln 5$$

02. نبسط ما يلي:  $A = \ln \sqrt{5} + \ln \frac{1}{25} - \ln 5$  .  $B = \ln(7 + 3\sqrt{2})^{2016} + \ln(7 - 3\sqrt{2})^{2016}$  .  $C = \ln e^3 + \ln \frac{1}{e}$

$$\bullet A = \ln \sqrt{5} + \ln \frac{1}{25} - \ln 5 = \ln 5^{\frac{1}{2}} - \ln 25 - \ln 5 = \frac{1}{2} \ln 5 - 2\ln 5 - \ln 5 = -\frac{5}{2} \ln 5$$

$$\bullet B = \ln(7 + 3\sqrt{2})^{2016} + \ln(7 - 3\sqrt{2})^{2016} = 2016 \ln(7 + 3\sqrt{2}) + 2016 \ln(7 - 3\sqrt{2})$$

$$= 2016 \ln[(7 + 3\sqrt{2})(7 - 3\sqrt{2})] = 2016 \ln(49 - 18) = 2016 \ln 31$$

$$\bullet C = \ln e^3 + \ln \frac{1}{e} = 3\ln e - \ln e = 3 \times 1 - 1 = 2$$

03. بدون استعمال المحسبة قارن العددين :  $a = 5\ln 2$  و  $b = 2\ln 5$

لدينا :  $a = 5\ln 2 = \ln 2^5 = \ln 32$  و  $b = 2\ln 5 = \ln 5^2 = \ln 25$  ومنه :  $25 < 32$  إذن :  $\ln 25 < \ln 32$   
خلاصة :  $a < b$

.02

حدد حيز تعريف الدالة  $f$  في كل حالة من الحالات التالية :

... 01

$$f(x) = \ln(x+5) + \ln(3-x)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+5 > 0 \text{ و } 3-x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -5 \text{ و } 3 > x$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-5; 3[$$

خلاصة : مجموعة تعريف  $f$  هي :  $D_f = ]-5; 3[$

$$\bullet f(x) = \ln(x^2 - 9) - \ln(-x)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \text{ و } -x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) > 0 \text{ و } x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]3; +\infty[ \text{ و } x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[$$



**خلاصة :** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = ]-\infty; -3[$

$$f(x) = \ln|x-2| + \sqrt{x-1}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \text{ و } x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ و } x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

**خلاصة :** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = [1; 2[ \cup ]2; +\infty[$

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; 2[ \cup ]3; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; 2[ \cup ]3; +\infty[$$

**خلاصة :** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]3; +\infty[$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{2x-8}{x+3}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{2x-8}{x+3} > 0 \text{ و } x+3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-8)(x+3) > 0 \text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]4; +\infty[ \text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]4; +\infty[$$

**خلاصة :** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = ]-\infty; -3[ \cup ]4; +\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-2}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-2 > 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

$$\Leftrightarrow x \in ]2; +\infty[$$

**خلاصة :** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = ]2; +\infty[$

$$f(x) = 5x^2 + \ln \frac{2x-8}{x+3}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{2x-8}{x+3} > 0 \text{ و } x+3 \neq 0$$



$$\Leftrightarrow (2x-8)(x+3) > 0 \text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]4; +\infty[ \text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]4; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = ]-\infty; -3[ \cup ]4; +\infty[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x^2}{x}\right) \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x} > 0 \text{ و } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2-x)(2+x) > 0 \text{ و } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-2; 2[ \text{ و } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-2; 0[ \cup ]0; 2[$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = ]-2; 0[ \cup ]0; 2[$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{3-\ln x} \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \text{ و } 3-\ln x \neq 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ و } \ln x \neq 3 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ و } \ln x \neq \ln e^3$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ و } x \neq e^3$$

$$\Leftrightarrow x \in [2; e^3[ \cup ]e^3; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف f هي :  $D_f = [2; e^3[ \cup ]e^3; +\infty[$

### 03.

حدد مجموعة تعريف ثم حل المعادلة أو المتراجحة أو النظمة التالية :

$$01. \quad (2+x)\ln(x-3) = 0$$

$$\bullet \quad \ln(x+1) - \ln(x-2) = 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0 \text{ و } x-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \text{ و } x > 2$$

$$\Leftrightarrow x \in ]2; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف المعادلة هي :  $D_f = ]2; +\infty[$

$$\text{نحل المعادلة على } D_f = ]2; +\infty[$$

$$\text{لدينا : } \ln(x+1) - \ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x+1 = x-2$$



$$\Leftrightarrow 1 = -2$$

**خلاصة:** مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = \emptyset$

$$-3 + \ln(x+1) = 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-1; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف المعادلة هي :  $D_f = ]-1; +\infty[$

نحل المعادلة على  $D_f = ]-1; +\infty[$

$$-3 + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 3 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln e^3$$

$$\Leftrightarrow x+1 = e^3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3 - 1 \in D_f = ]-1; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = \{e^3 - 1\}$

$$\ln x + \ln(x-3) = 2 \ln 2$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x-3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in ]3; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف المعادلة هي :  $D_f = ]3; +\infty[$

نحل المعادلة على  $D_f = ]3; +\infty[$

$$\ln x + \ln(x-3) = 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln x(x-3) = \ln 2^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \in D_f = ]3; +\infty[ \text{ أو } x = -1 \notin D_f = ]3; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = \{4\}$

$$(2+x) \ln(x-3) = 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in ]3; +\infty[$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف المعادلة هي :  $D_f = ]3; +\infty[$

نحل المعادلة على  $D_f = ]3; +\infty[$

$$(2+x) \ln(x-3) = 0 \Leftrightarrow 2+x=0 \text{ أو } \ln(x-3)=0 \quad \text{لدينا :}$$



$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ أو } \ln(x-3) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ أو } x-3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \notin D_f = ]3; +\infty[ \text{ أو } x = 4 \in D_f = ]3; +\infty[$$

**خلاصة :** مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = \{4\}$

$$\ln x - 4 \leq 0$$

**مجموعة تعريف المتراجحة :**

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]0; +\infty[$$

**خلاصة :** مجموعة تعريف المتراجحة هي :  $D_f = ]0; +\infty[$

نحل المتراجحة على  $D_f = ]0; +\infty[$

$$\ln x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \in ]0; 4[ \text{ ; } (x \in D_f = ]0; +\infty[)$$

لدينا :

**خلاصة :** مجموعة حلول المتراجحة هي :  $S = ]0; 4[$

$$\ln(2+5x) - \ln(x+6) \leq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2+5x > 0 \text{ و } x+6 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{5} \text{ و } x > -6$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$$

**خلاصة :** مجموعة تعريف المتراجحة هي :  $D_f = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$

نحل المتراجحة على  $D_f = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$

$$\ln(2+5x) - \ln(x+6) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow 2+5x \leq x+6$$

$$\Leftrightarrow 4x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{5}; 1 \right[ \text{ ; } \left( x \in D_f = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[ \right)$$

**خلاصة :** مجموعة حلول المتراجحة هي :  $S = \left] -\frac{2}{5}; 1 \right[$



$$\ln(x^2 - 8) \leq \ln x + \ln 2 \quad \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 8 > 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) > 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -\sqrt{8}[ \cup ]\sqrt{8}; +\infty[ \text{ و } x > 0$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف المتراجحة هي :  $D_f = ]\sqrt{8}; +\infty[$

نحل المتراجحة على  $D_f = ]\sqrt{8}; +\infty[$

$$\ln(x^2 - 8) \leq \ln x + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 8) \leq \ln(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8 \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-2; 4[ \quad ; \quad (x \in D_f = ]\sqrt{8}; +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow x \in ]\sqrt{8}; 4[ \quad ; \quad (x \in D_f = ]\sqrt{8}; +\infty[)$$

**خلاصة:** مجموعة حلول المتراجحة هي :  $S = ]\sqrt{8}; 4[$

$$\ln^2 x + \ln x - 2 \leq 0 \quad \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$$

**خلاصة:** مجموعة تعريف المتراجحة هي :  $D_f = ]0; +\infty[$

نحل المتراجحة على  $D_f = ]0; +\infty[$

لدينا :

$$\ln^2 x + \ln x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 + \ln x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) + \ln x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 2) \leq 0$$

x	0	$e^{-2}$	e	$+\infty$
$\ln x - 1 = \ln x - \ln e$	-	-	0	+
$\ln x + 2 = \ln x + \ln e^2$	-	0	+	+
$(\ln x - 1)(\ln x + 2)$	+	0	-	+

**خلاصة:** مجموعة حلول المتراجحة هي :  $S = ]0; e^{-2}[ \cup ]e; +\infty[$

$$(2+x)\ln(x-3) < 0 \quad \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in ]3; +\infty[$$



**خلاصة :** مجموعة تعريف المتراجحة هي :  $D_f = ]3; +\infty[$

نحل المتراجحة على  $D_f = ]3; +\infty[$

لدينا :

$$\ln(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-3) \geq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x-3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 4$$

x	-2	3	4	$+\infty$
$2+x$	0	+	+	+
$\ln(x-3)$			- 0	+
$(2+x)\ln(x-3)$			- 0	+

**خلاصة :** مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = ]3; 4[$

$$\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 6 \\ 5\ln x + 2\ln y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{نحل النظام : } \mathbf{03}$$

$$\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 6 \\ 5\ln x + 2\ln y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3z = 6 \\ 5t + 2z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{نضع } \ln x = t \text{ و } \ln y = z \text{ ومنه : } \frac{1}{2}$$

محددة النظام هي :  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19$  ومنه :  $\Delta \neq 0$  إذن النظام هي نظمة كرامير Cramer لها حل وحيد :

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{19} = \frac{-29}{19} \quad \text{و} \quad t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}}{19} = \frac{\frac{27}{2}}{19} = \frac{27}{38}$$

$$\text{أي : } \ln y = z = \frac{-29}{19} \quad \text{و} \quad \ln x = t = \frac{27}{38}$$

$$\text{وبالتالي : } x = e^{\frac{27}{38}} \quad \text{و} \quad y = e^{\frac{-29}{19}}$$

**خلاصة :** مجموعة حلول النظام هي :  $S = \left\{ \left( e^{\frac{27}{38}}; e^{\frac{-29}{19}} \right) \right\}$  أو أيضا حل النظام هو الزوج  $\left( e^{\frac{27}{38}}; e^{\frac{-29}{19}} \right)$ .

**.04**

نحسب النهايات التالية:

$$\dots \mathbf{01} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad \left( \text{ضع } X = \frac{1}{x} \right)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + \ln x = -\infty$$



تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية ( الجزء الأول )

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  : لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$
- $t \rightarrow +\infty$  فإن  $x \rightarrow +\infty$  و  $t = \sqrt{x}$  مع  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty$  : لأن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 2 \ln \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( 1 - 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  : لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} \times \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 15}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left( \frac{3x + 15}{x - 2} \right) = \ln 3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0$  : لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{-1 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left( \frac{2}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left( \frac{-1}{\ln x} + 1 \right)} = 1$
- نضع  $2x = X$  و منه :  $x \rightarrow 0$  فإن  $X \rightarrow 0$  و منه  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{\frac{X}{2}} = \lim_{X \rightarrow 0} 2 \times \frac{\ln(1 + X)}{X} = 2$
- لأن  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$
- نضع  $X = \frac{1}{x}$  و منه :  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $X \rightarrow 0^+$  و منه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 3} 2x \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$  ؛ .....02
- مع  $t = x^2 + 1$   $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$  لأن  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 + x^3} \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 1}{1 + x^3} = 0$
- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{1 + x^3} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$  و  $t \rightarrow +\infty$  فإن  $|x| \rightarrow +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  : لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - 2x - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ x^2 - 2 - \frac{\ln x}{x} \right] = +\infty$





تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية ( الجزء الأول )

• نضع  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x-e}$  :  $f(x) = \ln x$  ومنه :  $f(e) = 1$  إذن

•  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x-e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = f'(e) = (\ln x)'_{x=e} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=e} = \frac{1}{e}$

• نضع  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x \frac{\ln x - \ln 3}{x-3}$  :  $f(x) = \ln x$  ومنه :  $f(3) = \ln 3$  إذن

$\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = (\ln x)'_{x=3} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=3} = \frac{1}{3}$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x \frac{\ln x - \ln 3}{x-3} = 2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 2$

**.05**

لتعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  ب :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2 - 2 \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ندرس اتصال الدالة  $f$  على يمين  $x_0 = 0$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \frac{1}{\ln x} = 0$  ( لأن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  )

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x^2 - 2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x}{\ln x} + 1\right) \ln x}{\left(\frac{x^2}{\ln x} - 2\right) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x}{\ln x} + 1\right)}{\left(\frac{x^2}{\ln x} - 2\right)} = -\frac{1}{2}$$

و ذلك  $\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \right)$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2} = f(0)$

**خلاصة :** الدالة  $f$  متصلة على يمين  $x_0 = 0$

**.06**

لتعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  ب :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln(x^2) - 2x ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

**.01** نبين أن : الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

لدينا :

• الدوال :  $x \mapsto \ln x$  ;  $x \mapsto x^2$  ;  $x \mapsto 2x$  ;  $x \mapsto x$  متصلة على  $\mathbb{R}^*$  و منه الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}^*$  ( مجموع وجداء و

مركبة دوال متصلة على  $\mathbb{R}^*$  .

• ندرس اتصال الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$

$$\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \right) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2) - 2x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(|x|^2) - 2x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(|x|) - 2x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0) \text{ و منه :}$$

و منه : الدالة  $f$  متصلة في  $x_0 = 0$

**خلاصة :** الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}^*$  ومتصلة في  $0$  و بالتالي الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

**02** ندرس اشتقاق الدالة  $f$  في  $x_0 = 0$  ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة المحصل عليها .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x^2) - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) - 2 = -\infty \notin \mathbb{R}$$

**خلاصة :** الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في النقطة  $x_0 = 0$  و منه منحنى الدالة  $f$  يقبل مماس موازي للمحور الأرتاب في النقطة  $x_0 = 0$ .

**.07**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x-1} ; x \in ]0; +\infty[ \setminus \{1\} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  ب :

**01** ندرس اتصال الدالة  $f$  في  $x_0 = 1$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \times \frac{\ln x}{x-1} = 1$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$  و منه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(0)$

**خلاصة :** الدالة  $f$  غير متصلة في  $x_0 = 1$

**02** ماذا يمكن أن نقول عن اشتقاق  $f$  في  $x_0 = 1$

بما أن الدالة  $f$  غير متصلة في  $x_0 = 1$  فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $x_0 = 1$

**.08**

أحسب مشتقة  $f$  في كل حالة من الحالات التالية:

**01** ...

$$f'(x) = \left[ \ln(6-5x) + \frac{3}{x} \right]' = \frac{(6-5x)'}{6-5x} - \frac{3}{x^2} = \frac{-5}{6-5x} - \frac{3}{x^2}$$

$$f'(x) = \left( \frac{2}{\ln x} \right)' = 2 \times \frac{-(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -2 \times \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{-2}{x(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = (\ln^3 x)' = 3(\ln x)^2 (\ln x)' = 3(\ln x)^2 \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln(x^3 + 4))' = (x^3 + 4)' \times \ln'(x^3 + 4) = 3x^2 \times \frac{1}{x^3 + 4}$$

$$f'(x) = (\ln|x^2 - 3x|)' = \frac{(x^2 - 3x)'}{x^2 - 3x} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}$$

**02**

$$f'(x) = \left[ (x^2 - 1) \ln x \right]' = 2x \ln x + (x^2 - 1)(\ln x)' = 2x \ln x + (x^2 - 1) \times \frac{1}{x}$$



$$f'(x) = \left[ \frac{\ln x}{x^2+1} \right]' = \frac{(\ln x)'(x^2+1) - (\ln x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{x^2+1}{x} - (\ln x)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1 - (\ln x)(2x+1)x}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1 - (\ln x)(2x^2+x)}{x(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \left( 3x^2 + \ln \frac{2x-8}{x+3} \right)' = (3x^2)' + \left( \frac{2x-8}{x+3} \right)' = 6x \times \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{(x+3)^2} = \frac{6x \times 14}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \left( \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 7} \right)' = \frac{(2\ln x + 3)'(\ln x - 7) - (2\ln x + 3)(\ln x - 7)'}{(\ln x - 7)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x}(\ln x - 7) - (2\ln x + 3) \times \frac{1}{x}}{(\ln x - 7)^2} = \frac{2(\ln x - 7) - (2\ln x + 3)}{x(\ln x - 7)^2} = \frac{-17}{x(\ln x - 7)^2}$$

طريقة 2 :

$$f'(x) = \left( \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 7} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{(\ln x - 7)^2} \times (\ln x)' = \frac{-17}{(\ln x - 7)^2 x}$$

$$f'(x) = \left( \frac{x - \ln x}{x^2} \right)' = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x^2 - (x - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{x^2 - x - 2x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x^2 - x + 2x \ln x}{x^4}$$

f(x) = ln(ln x) **03**

$$f'(x) = \left[ \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]' = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+1} + 2x}{(x + \sqrt{x^2+1})(2\sqrt{x^2+1})} = \frac{\cancel{2}(x + \sqrt{x^2+1})}{(x + \sqrt{x^2+1})(\cancel{2}\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \left[ \ln(x^2 - 5x + 1) \right]' = \frac{(x^2 - 5x + 1)'}{x^2 - 5x + 1} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 1}$$

$$f'(x) = \left[ \left[ \ln(6 - 5x) \right]^2 \right]' = 2 \left[ \ln(6 - 5x) \right]' \left[ \ln(6 - 5x) \right] = 2 \times \frac{-5x}{6 - 5x} \times \left[ \ln(6 - 5x) \right]$$

$$f'(x) = (\ln(\ln x))' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$



## .09

نحدد دالة أصلية على المجال I للدوال الأصلية التالية :

•  $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$  ;  $I = ]0, +\infty[$  ; دالة أصلية على المجال I هي :  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \ln x$  لأن  $\ln|x| = \ln x$  .

•  $f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}$  ;  $I = ]0, +\infty[$  ; دالة أصلية على المجال I هي :  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + 5\ln x - \frac{3}{x}$  لأن :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

•  $f(x) = \frac{5}{x+1}$  ;  $I = ]-\infty, -1[$  ; دالة أصلية على المجال I هي :  $F(x) = 5\ln|x+1| = 5\ln(-x-1)$  لأن

$$. x \in I = ]-\infty, -1[$$

## .10

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على  $\mathbb{R}^{++}$  ب :  $f(x) = x + \ln x$  .

**01.** نبين أن : الدالة f تحقق تقابل من  $\mathbb{R}^{++}$  إلى مجال J يتم تحده .

لدينا :

• الدالة f متصلة على  $\mathbb{R}^{++}$  لأنها مجموع دالتين متصلتين على  $\mathbb{R}^{++}$  .

• الدالة f قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^{++}$  لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}^{++}$  مع  $f(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$  لأن  $x \in \mathbb{R}^{++}$  و

بالتالي الدالة f تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}^{++}$  .

• لدينا :  $J = f(I) = f(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty; +\infty[$  .

**خلاصة :** الدالة f تحقق تقابل من  $\mathbb{R}^{++}$  إلى مجال  $J = ]-\infty; +\infty[$  .

**02.** نعل أن المعادلة  $x + \ln x = 2005$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  من  $]0; +\infty[$  و  $1997 \leq \alpha \leq 1998$  ( نأخذ  $\ln 1997 \approx \ln 1998 \approx 7,6$  )

لدينا :  $2005 < f(1998) \approx 1998 + 7,6$  ;  $2005 < f(1997) \approx 1997 + 7,6$  و منه  $f(1997) < 2005 < f(1998)$

من خلال مبرهنة المتوسط و التقابل يوجد عدد وحيد  $\alpha$  من  $]1997; 1998[$  حيث  $f(\alpha) = 2005$  .

## .11

**01.** نبسط :  $\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4\log_3(3) = 4 \times 1 = 4$  .

**02.** نحدد العدد x حيث اللوغاريتم هذا العدد في الأساس 4 هو -2 أي

$$\log_4(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 4} = -2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -2\ln 4$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln 4^{-2}$$



$$\Leftrightarrow x = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

خلاصة : العدد هو  $x = \frac{1}{16}$

طريقة 2 :

$$\log_4(x) = -2 \Leftrightarrow \exp_4(\log_4(x)) = \exp_4(-2)$$

$$\Leftrightarrow x = 4^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$$

**03** نحدد حيز تعريف الدالة  $f$  :  $f(x) = \log_2(x+1)$  ؛  $f(x) = \sqrt{x} + \log_3(x^2 - 1)$  ؛  $\log_x(10)$

$$\bullet f(x) = \log_2(x+1)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة  $f$  هو :  $D_f = ]-1; +\infty[$

$$\bullet f(x) = \sqrt{x} + \log_3(x^2 - 1)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ و } x^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ و } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in ]1; +\infty[$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة  $f$  هو :  $D_f = ]1; +\infty[$

$$\bullet f(x) = \log_x(10)$$

$$f(x) = \log_x(10) = \frac{\ln 10}{\ln x} \text{ : نلاحظ أن :}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0 \text{ : ومنه :}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة  $f$  هو :  $D_f = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

ملحوظة : اللوغاريتم الذي أساسه  $a$  يشترط أن  $a \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

**04** أحسب الدالة المشتقة للدالة  $f$  في الحالات التالية :

$$\bullet f(x) = \log_5(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \left[ \log_5(x^2 + 1) \right]'$$

$$= \left[ \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 5} \right]'$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\ln 5} \times [\ln(x^2 + 1)]' \\
 &= \frac{1}{\ln 5} \times \left[ \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} \right] \\
 &= \frac{1}{\ln 5} \times \frac{2x}{(x^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

**خلاصة:** الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي :  $f'(x) = \left[ \log_5(x^2 + 1) \right]' = \frac{1}{\ln 5} \times \frac{2x}{(x^2 + 1)}$

$$f(x) = \log_3(\sqrt{x^2 - 2x - 3}) \quad \bullet$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left[ \log_3(\sqrt{x^2 - 2x - 3}) \right]' \\
 &= \left[ \frac{\ln(\sqrt{x^2 - 2x - 3})}{\ln 3} \right]' \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \left( \ln(\sqrt{x^2 - 2x - 3}) \right)' \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{(\sqrt{x^2 - 2x - 3})'}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}
 \end{aligned}$$

**خلاصة:** الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي :  $f'(x) = \left[ \log_3(\sqrt{x^2 - 2x - 3}) \right]' = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}$

$$f(x) = \log_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \bullet$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left[ \log_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right]' \\
 &= \left[ \frac{\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln 2} \right]'
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\ln 2} \times \left[ \ln \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right]' \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \times \left[ \frac{\left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right)'}{\tan \left( \frac{x}{2} \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1 + \frac{1}{2} \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{\tan \left( \frac{x}{2} \right)} \\
 &= \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{2 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{\tan \left( \frac{x}{2} \right)}
 \end{aligned}$$

**خلاصة:** الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي :  $f'(x) = \left[ \log_2 \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right]' = \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{2 + \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{\tan \left( \frac{x}{2} \right)}$

## .12

نذكر أن :  $\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$  و نرمزل ب  $\log(x)$  ب  $\log_{10}(x)$  و يسمى اللوغاريتم العشري ( أي الذي أساسه 10 .

ملحوظة :  $\log(1) = 0$  و  $\log(10^p) = p$  مع  $p \in \mathbb{Z}$  .

pH لمحلول معرف بالعلاقة :  $\text{pH} = -\log \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C_0} \right)$  حيث  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  تمثل تركيز أيونات  $\text{H}_3\text{O}^+$  ( ions oxoniom ) معبر عنها

ب mol / litre و  $C_0$  معبر عنها ب 1 mol / litre .

**.01** نحسب pH التي توافق تركيز  $10^{-2}$  mol / l  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2}$  .

**.02** أحسب التركيز أيونات ( ions oxoniom ) في محلول حيث pH هو 7 .

**.03** كيف يصبح pH عندما التركيز يقسم على 10 ؟ على 100 ؟

**.04** ما هو التركيز عندما ينخفض pH ب 1 ؟ ب 2 ؟

**.05** لماذا الكيميائيين يستعملن  $\log$  ( اللوغاريتم العشري ) بدل  $\ln$  ( اللوغاريتم النبيري ) عند حساب pH ؟