

تمارين

تمارين محلولة

تمرين 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x-3}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} \quad \text{حدد}$$

الحل

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x-3}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} \quad \text{نحدد} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} \right] = 2 - 1 = 1 \quad * \\ & \text{نضع } x = -\frac{3}{t} \text{ أي } t = -\frac{3}{x} \quad * \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x-3}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[-3 \frac{\ln(1+t)}{t} \right] = -3 \quad \text{ومنه} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} = 1 \quad * \end{aligned}$$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 3)$$

1- حدد D_f ونهايات f عند محددات D_f

2- حل المتراجحة $f(x) \geq 0$

3- حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$

الحل

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 3)$$

4- نحدد D_f

لتكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 3 > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} - 3e^x + 3 > 0$ وبالتالي $\Delta = -3$ ومنه $X^2 - 3X + 3$ مميز

إذن $D_f = \mathbb{R}$

* نحدد نهايات f عند محددات D_f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 3e^x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[e^{2x} (1 - 3e^{-x} + 3e^{-2x}) \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{2x} - 3e^x + 3) = \ln 3$$

5- نحل المتراجحة $f(x) \geq 0$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 3e^x + 3) \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 3 \geq 1$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2) \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \in [0;1] \cup [2; +\infty[$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [\ln 2; +\infty[$$

$$S =]-\infty; 0] \cup [\ln 2; +\infty[\text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) \text{ نحدد -6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{2x} - 3e^x + 3) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{3}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right) = 0$$

تمارين 3

$$f(x) = x + 1 + e^{-x}$$

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ

$$1- \text{أ- أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ب- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f واستنتج إشارة $f(x)$

$$2- \text{ نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } g(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$$

أ- أدرس تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

ب- (a) حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + x$ وأول النتيجة هندسيا

(b) بين أن $\forall x \in]-\infty; -1[\quad g(x) + x < 0$

$$(c) \text{ استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < g(x) - \ln x \leq \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \text{ بين أن}$$

$$f(x) = x + 1 + e^{-x}$$

الحل

$$1- \text{أ- نحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right) = +\infty$$

ب- نحسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f و نستنتج إشارة $f(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - e^{-x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f	$+\infty$	2	$+\infty$

لدينا f تناقصية على $]-\infty; 0[$ و تزايدية على $[0; +\infty[$ و منه $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(0) > 0$

$$2- \text{ نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } g(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$$

$$\text{أ- ندرس تغيرات } g \text{ و نعطي جدول تغيراتها} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + 1 + e^{-x}} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
g	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

(ب-ا) نحدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + x$ ونؤول النتيجة هندسيا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(x+1+e^{-x}) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(x+1+e^{-x}) + \ln e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x + e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(-\frac{-x}{e^{-x}} + e^x + 1\right) = 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$

(ب) نبين أن $\forall x \in]-\infty; -1[\quad g(x) + x < 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) + x = \ln(xe^x + e^x + 1) = \ln((x+1)e^x + 1)$$

ليكن $x \in]-\infty; -1[$ ومنه $x+1 < 0$ وبالتالي $e^x(x+1)+1 < 1$

ومنه $\forall x \in]-\infty; -1[\quad g(x) + x < 0$ إذن $\ln(e^x(x+1)+1) < 0$

(ج) نبين أن $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad 0 < g(x) - \ln x \leq \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ ونستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \ln x$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g(x) - \ln x = \ln(x+1+e^{-x}) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x}\right)$$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \frac{x+1+e^{-x}}{x} > 1$ إذن $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad g(x) - \ln x > 0$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad e^{-x} < 1$ ومنه $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad 1+x+e^{-x} < x+2$ وبالتالي $\frac{1+x+e^{-x}}{x} < \frac{x+2}{x}$

ومنه $\ln\frac{1+x+e^{-x}}{x} < \ln\frac{x+2}{x}$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad 0 < g(x) - \ln x \leq \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = |2x(1 - \ln x)| & x > 0 \\ f(x) = e^x - 1 - 2\sqrt{1 - e^x} & x \leq 0 \end{cases}$$

1- أدرس اشتقاق واتصال f عند النقطتين 0 و e

و أعط التأويل الهندسي للنتائج المحصل عليها

2- أحسب نهايات f عند محداث D_f ثم أدرس الفروع للانتهائية لـ C_f

3- أدرس تغيرات f وأنشئ C_f $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2 \text{ cm}$

4- بين أن g قصور الدالة f على $]-\infty; 0]$ تقابل من $]-\infty; 0]$ نحو مجال J يوجب تحديده

أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

الحل

$$\begin{cases} f(x) = |2x(1 - \ln x)| & x > 0 \\ f(x) = e^x - 1 - 2\sqrt{1 - e^x} & x \leq 0 \end{cases}$$

1- ندرس اتصال و اشتقاق f عند النقطتين 0 و e نؤول هندسيا للنتائج المحصل عليها

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |2x(1 - \ln x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |2x - 2x \ln x| = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 - 2\sqrt{1 - e^x} = 0 = f(0)$$

إذن f متصلة في 0

$$\text{إذن } f \text{ متصلة في } e \quad \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} |2x(1 - \ln x)| = 0 = f(e)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x(1 - \ln x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |2(1 - \ln x)| = +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين و منحناها يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 - 2\sqrt{1 - e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{e^x - 1}{x} + 2 \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 - e^x}} \right] = +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في 0 على اليسار و منحناها يقبل نصف مماس عمودي على يسار 0

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{|2x(1 - \ln x)|}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^+} 2x \frac{\ln x - 1}{x - e} = 2e \times \frac{1}{e} = 2$$

إذن f قابلة للاشتقاق في e على اليمين و منحناها يقبل نصف مماس على يمين e معامله الموجه 2

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{|2x(1 - \ln x)|}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} -2x \frac{\ln x - 1}{x - e} = -2e \times \frac{1}{e} = -2$$

إذن f قابلة للاشتقاق في e على اليسار و منحناها يقبل نصف مماس على يسار e معامله الموجه -2

2- نحسب نهايات f عند محددات D_f ثم ندرس الفروع للانتهائية لـ C_f

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 - 2\sqrt{1 - e^x} = -3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |2x(1 - \ln x)| = +\infty$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = -3$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x(1 - \ln x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |2(1 - \ln x)| = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأرتاب

3- ندرس تغيرات f و ننشئ C_f

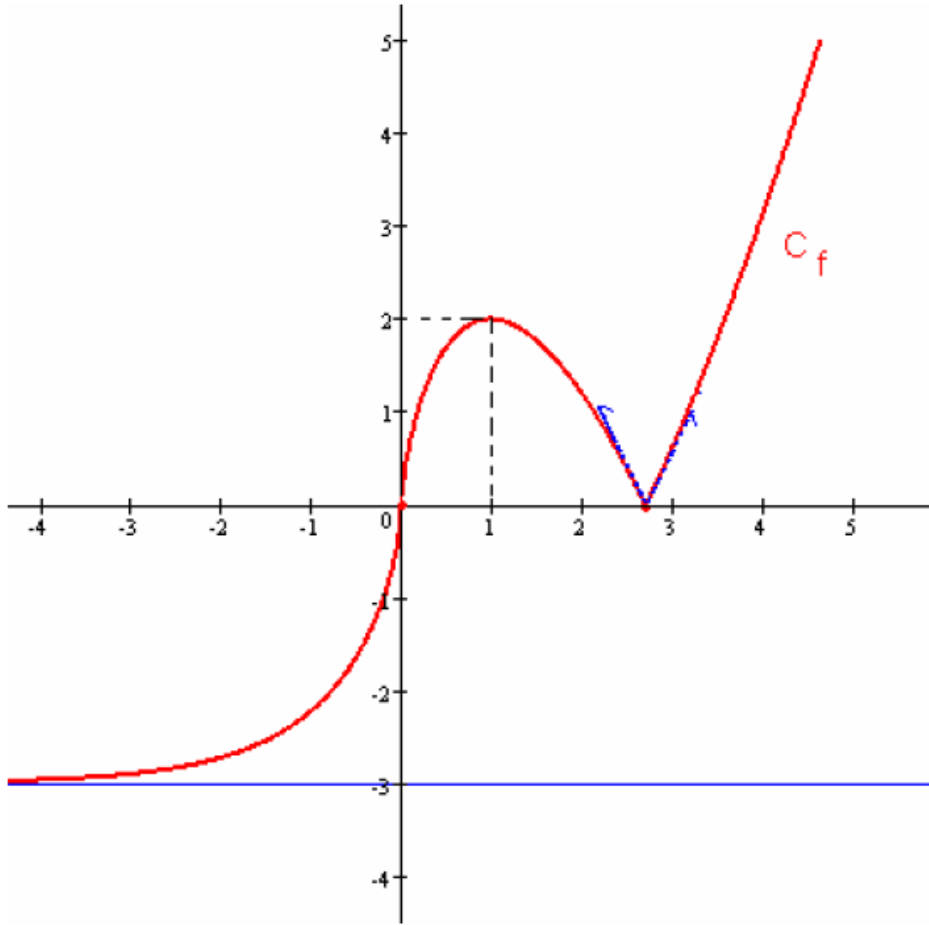
$$\forall x \in]0; e[\quad f'(x) = [2x(1 - \ln x)]' = 2(1 - \ln x) - 2 = -\ln x$$

$$\forall x \in]e; +\infty[\quad f'(x) = [-2x(1 - \ln x)]' = -2(1 - \ln x) + 2 = \ln x$$

$$\forall x \in]e; +\infty[\quad f'(x) = (e^x - 1 - 2\sqrt{1 - e^x})' = e^x + \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^x}}$$

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	-3	0	2	0	$+\infty$

إنشاء (C_f)



4- نبين أن g قصور الدالة f على $]-\infty; 0]$ تقابل من $]-\infty; 0]$ نحو مجال J يجب تحديده

لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على $]-\infty; 0]$ و $g(]-\infty; 0]) =]-3; 0]$

ومنه g تقابل من $]-\infty; 0]$ الى $J =]-3; 0]$

نحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

لتكن $x \in]-3; 0]$ و $y \in]-\infty; 0]$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow e^y - 1 - 2\sqrt{1 - e^y} = x$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^y + 2\sqrt{1 - e^y} + 1 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1 - e^y} + 1)^2 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - e^y} = \sqrt{-x + 1} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^y = 1 - (\sqrt{-x + 1} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \ln \left[1 - (\sqrt{-x + 1} - 1)^2 \right]$$

$$\forall x \in]-3; 0] \quad g^{-1}(x) = \ln \left[1 - (\sqrt{-x + 1} - 1)^2 \right] \quad \text{اذن}$$

تمرين 5

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

- 1 حدد D_f ونهايات f عند محددات D_f
- 2 أدرس تغيرات f وأعط جدول تغيراتها
- 3 أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى f
- 4 بين أن $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f
- 5 أنشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م.
- 6 لتكن $m \in \mathbb{R}$

$$2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0 \quad \text{حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة}$$

الحل

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

-1 نحدد D_f

لتكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\quad \text{إذن}$$

نحدد نهايات f عند محددات D_f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty$$

-2 ندرس تغيرات f ونعطي جدول تغيراتها

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$$

ليكن Δ مميز $2X^2 - 5X + 2$ لدينا $\Delta = 9$

ومنه جدرا $2X^2 - 5X + 2$ هما $X_1 = 2$ و $X_2 = \frac{1}{2}$

$$2X^2 - 5X + 2 \geq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty[$$

$$x \in \mathbb{R}^* \quad 2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^* \quad e^x \in]0; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\ln 2] \cup [\ln 2; +\infty[$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\ln 2] \cup [\ln 2; +\infty[\quad \text{ومنه}$$

إذن f تزايدية على كل من $]-\infty, -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$
 f تناقصية على كل من $]0; \ln 2[$ و $]-\ln 2; 0[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-1 - 2 \ln 2$	$+\infty$	$2 + 2 \ln 2$	$+\infty$

3- ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى C_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

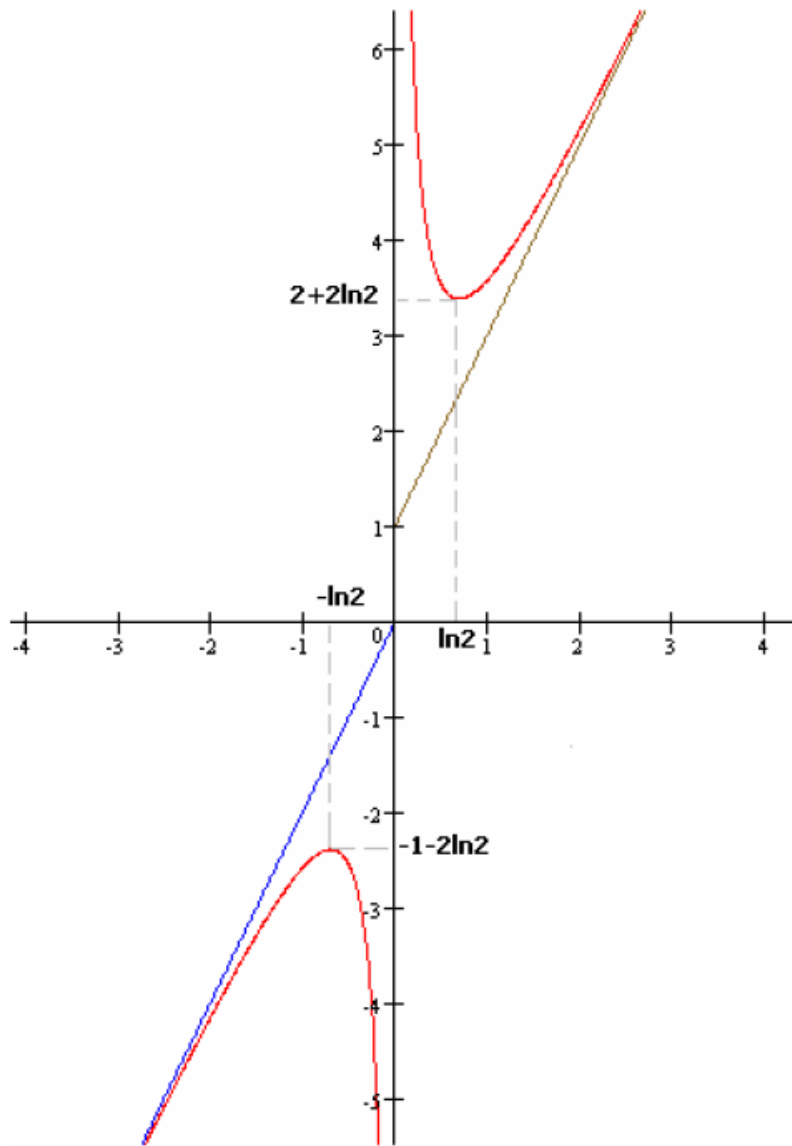
إذن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى C_f

4- نبين أن $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

$$1 - f(x) = 1 - 2x - \frac{e^x}{e^x + 1} = -2x + \frac{1}{1 + e^x} \text{ و } f(-x) = -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = -2x + \frac{1}{1 + e^x}$$

ومنه $f(-x) = 1 - f(x)$ إذن $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

5- ننشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م.



-6 نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0$

$$2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0 \Leftrightarrow m(1 - e^x) = 2x(1 - e^x) - e^x$$

نلاحظ أن 0 ليس حلا للمعادلة مهما كانت m

$$2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0 \Leftrightarrow m = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \Leftrightarrow m = f(x) \text{ ومنه}$$

تحديد عدد حلول المعادلة $2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0$ يرجع الى تحديد عدد نقط تقاطع C_f و المستقيم ذا المعادلة $y = m$

مبيانيا لدينا :

إذا كان $m \in]-1 - 2\ln 2; 2 + 2\ln 2[$ فإن المعادلة $2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0$ لا تقبل حلا

إذا كان $m = 2 + 2\ln 2$ أو $m = -1 - 2\ln 2$ فإن المعادلة $2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0$ تقبل حلا وحيدا

إذا كان $m \in]-\infty; -1 - 2\ln 2[\cup]2 + 2\ln 2; +\infty[$ فإن المعادلة $2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0$ تقبل حلين مختلفين

تمرين 6

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} & ; x > 1 \\ f(x) = (1-x) \ln(1-x) & ; x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1- حدد $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أدرس الاشتقاق عند 1 و أول النتيجةين هندسيا

3- أحسب $f'(x)$ على كل من $]1; +\infty[$ و $] -\infty; 1[$ و أعط جدول التغيرات

4- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f

الحل

$$\begin{cases} f(x) = e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} & ; x > 1 \\ f(x) = (1-x) \ln(1-x) & ; x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1- نحدد $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

نضع $t = 1 - \frac{1}{x}$ أي $x = \frac{1}{1-t}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow 1^-} e^{-\frac{\ln(t)}{t-1}} = \frac{1}{e}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \ln(1-x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 0$

2- ندرس الاشتقاق عند 1 و نؤول النتيجةين هندسيا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{e^{\ln(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \ln(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{(x-1) \ln(x-1) - x \ln x} = 1 \end{aligned}$$

f قابلة للاشتقاق على يمين 1 و المعامل الموجه للمماس على يمين 1 هو 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) = +\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و C_f يقبل مماس عمودي على يسار 1

3- نحسب $f'(x)$ على كل من $]1; +\infty[$ و $] -\infty; 1[$ و نعطي جدول التغيرات

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad f'(x) = \left(\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + x \left(\frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \right) \right) e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \left[\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1} \right] e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad h(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \text{ نعتبر}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad h'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)^2}$$

$\forall x \in]1; +\infty[$ ومنه h تناقصية على $]1; +\infty[$ وحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ فان $h(x) \leq 0$

ومنه $\forall x \in]1; +\infty[\quad f'(x) \leq 0$ إذن f تناقصية على $]1; +\infty[$

$$\forall x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) = -1 - \ln(1-x) *$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - e^{-1}$$

ومنه $\forall x \in]-\infty; 1 - e^{-1}[\quad f'(x) \leq 0$ و $\forall x \in]1 - e^{-1}; 1[\quad f'(x) > 0$

إذن f تزايدية على $]1 - e^{-1}; 1[$ و تناقصية على $] -\infty; 1 - e^{-1}[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$1 - e^{-1}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+
f	$+\infty$	$-e^{-1}$	0	e^{-1}

7- ندرس الفروع اللانهائية و ننشئ C_f

* لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{e}$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = \frac{1}{e}$ مقارب للمنحنى C_f

* لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x) = -\infty$

ومنه C_f يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتايب

تمرين 7

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} , & x \leq 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} , & x > 0 \end{cases}$$

1. أ/ بين أن $D_f = \mathbb{R}$ حيث D_f مجموعة تعريف الدالة f .
ب/ أحسب نهايات f عند محداث D_f . ثم أول النتائج هندسيا.
2. أ/ ادرس اتصال f عند $x_0 = 0$.
ب/ ادرس اشتقاق f عند $x_0 = 0$. ثم أول النتيجة هندسيا.
3. أ/ أثبت أن f' الدالة المشتقة للدالة f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x}) & , x < 0 \\ f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} & , x > 0 \end{cases}$$

ب/ استنتج تغيرات الدالة f و أنشئ جدول التغيرات.

4. اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$.

5. أنشئ C_f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

6. لتكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[-\frac{1}{2} \ln 2, 0\right]$

أ/ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب/ أنشئ جدول تغيرات g^{-1} الدالة العكسية للدالة g

ج/ حدد الصيغة $g^{-1}(x)$ لكل x من J

ملحوظة: نعتبر التقريبات التالية: $e = 2.7$ $e^{\frac{1}{e}} = 1.4$ $\ln 2 = 0.7$

الحل

$$\begin{cases} f(x) = e^x \sqrt{1-e^{2x}} & , x \leq 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} & , x > 0 \end{cases}$$

1. أ/ نبين أن $D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \leq 0$ $1 - e^{2x} \geq 0$ ومنه $f(x) \in \mathbb{R}$ وبالتالي $]-\infty; 0] \subset D_f$

$\forall x > 0$ $e^{\frac{\ln x}{x}} \in \mathbb{R}$ ومنه $]0, \infty[\subset D_f$ إذن $D_f = \mathbb{R}$

ب/ نحسب نهايات f عند محداث D_f . ثم نؤول النتائج هندسيا.

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sqrt{1-e^{2x}} = 0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

* لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

2. أ/ ندرس اتصال f عند $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \sqrt{1-e^{2x}} = 0$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ إذن f متصلة في 0

ب/ ندرس اشتقاق f عند $x_0 = 0$. ثم نؤول النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \sqrt{1-e^{2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -e^x \sqrt{\frac{1-e^x}{-x}} \sqrt{\frac{1+e^x}{-x}} = -\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق في 0 على اليسار و تقبل نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الأضلاع 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}(\ln x - x \ln x)} = 0$$

f قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين و تقبل نصف مماس أفقي عند النقطة ذات الأضلاع 0
 3. أ/ نثبت أن f' الدالة المشتقة للدالة f معرفة كما يلي:

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x}), \quad x < 0 \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}, \quad x > 0$$

لدينا $\forall x < 0 \quad f(x) = e^x \sqrt{1-e^{2x}}$

$$\forall x < 0 \quad f'(x) = e^x \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \frac{-e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} = e^x \left(\frac{1-e^{2x} - e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} \right) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x}) \text{ ومنه}$$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} \text{ ومنه } \forall x > 0 \quad f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

ب/ نستنتج تغيرات الدالة f و نعطي جدول التغيرات.

* على $]-\infty; 0[$ إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-2e^{2x}$

$$1-2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\ln 2}{2}$$

* على $]0; +\infty[$ إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-\ln x$

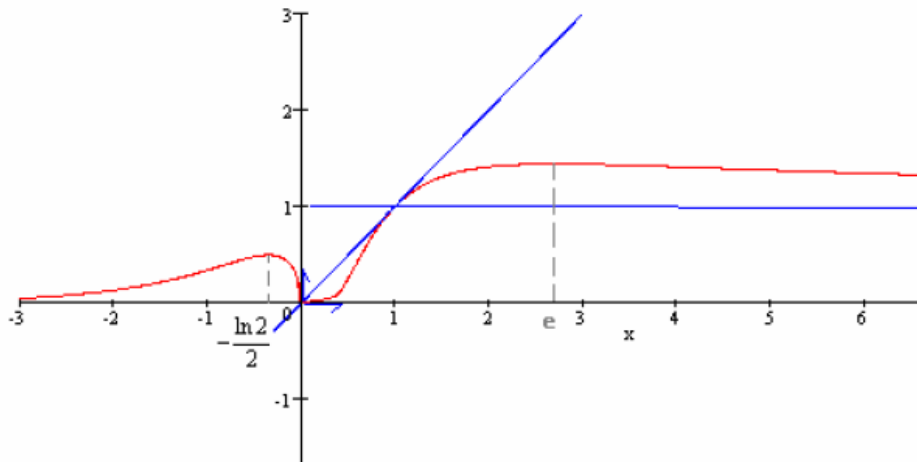
$$1-\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$$

x	$-\infty$	$\frac{-\ln 2}{2}$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{e^e}$

4. نكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$.

لدينا $f(1) = 1$ و $f'(1) = 1$ ومنه معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$ هو المستقيم ذا المعادلة $y = x$

5. ننشئ C_f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})



6. لتكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[-\frac{1}{2}\ln 2, 0\right]$

أ/ نبين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

$g(I) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ و I و تناقصية قطعاً على I

ومنه g تقابل من I نحو مجال $J = \left[0; \frac{1}{2}\right]$

ب/ جدول تغيرات الدالة g^{-1}

x	0	$\frac{1}{2}$
g^{-1}	0	$-\frac{\ln 2}{2}$

ج/ نحدد الصيغة $g^{-1}(x)$ لكل x من J

ليكن $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ و $y \in \left[-\frac{1}{2}\ln 2, 0\right]$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow e^y \sqrt{1-e^{2y}} = x \Leftrightarrow e^{2y} (1-e^{2y}) = x$$

نضع $Y = e^{2y}$ و $Y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow Y^2 - Y + x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - x$$

$$\Leftrightarrow Y = \sqrt{\frac{1}{4} - x} + \frac{1}{2}$$

ومنه $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^{2y} = \sqrt{\frac{1}{4} - x} + \frac{1}{2}$

$$\forall x \in J \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{\frac{1}{4} - x} + \frac{1}{2} \right) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{\frac{1}{4} - x} + \frac{1}{2} \right)$$

مربى 8

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x) = \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2}$

و ليكن C_f منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1- حدد D_f ثم النهايات عند محداث D_f

2- لتكن g دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $g(x) = 2 - x - 2 \ln(x-1)$

أ) أدرس تغيرات الدالة g و أعط جدول تغيراتها

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً هو 2

3- أ) أدرس تغيرات f

(ب) أعط جدول قيم لدالة f ممثلا في صور الأعداد $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{8}$; 3 ; 4 بالدالة f و قيم

مقربة لهذه الصور

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\left] \frac{11}{8}; \frac{3}{2} \right[$

-4 أنشئ المنحنى C_f (نقبل أن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف أفصوله محصور بين 2 و 3

ملاحظة: $\ln 3 \approx 1,09$; $\ln 2 \approx 0,69$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2} \quad \text{الحل}$$

1- نحدد D_f ثم النهايات عند محددات D_f

$$D_f =]1; +\infty[\quad \text{إذن} \quad x \in D_f \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} [x^2 - x + \ln(x-1)] = -\infty \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{(x-1)^2} \ln \frac{1}{(x-1)^2} \right] = 1$$

$$g(x) = 2 - x - 2 \ln(x-1) \quad -2$$

(أ) ندرس تغيرات الدالة g و نعطي جدول تغيراتها

$$D_g =]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [2 - x - 2 \ln(x-1)] = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 - x - 2 \ln(x-1)] = -\infty$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad g'(x) = -1 - \frac{2}{x-1} = \frac{-x-1}{x-1}$$

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		-
g	$+\infty$	$-\infty$

(ب) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا هو 2

لدينا g متصلة و تزايديا قطعا على $]1; +\infty[$ و $g(2) = 0$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا هو 2

-3 (أ) ندرس تغيرات f

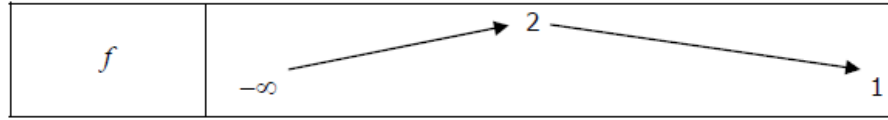
$$\forall x \in]1; +\infty[\quad f'(x) = \frac{\left(2x-1 + \frac{1}{x-1}\right)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - x + \ln(x-1))}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2x^2 - 3x + 2 - 2x^2 + 2x - 2 \ln(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{-x + 2 - 2 \ln(x-1)}{(x-1)^3}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3} \quad \text{إذن}$$

من 2 (أ) و (ب) نستنتج أن $f'(x) > 0$ و $\forall x \in]1; 2[$ و $f'(x) < 0$ و $\forall x \in]2; +\infty[$

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -



ب) جدول قيم لدالة f لبعض الأعداد $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{8}$; 3 ; 4 بالدالة f وقيم

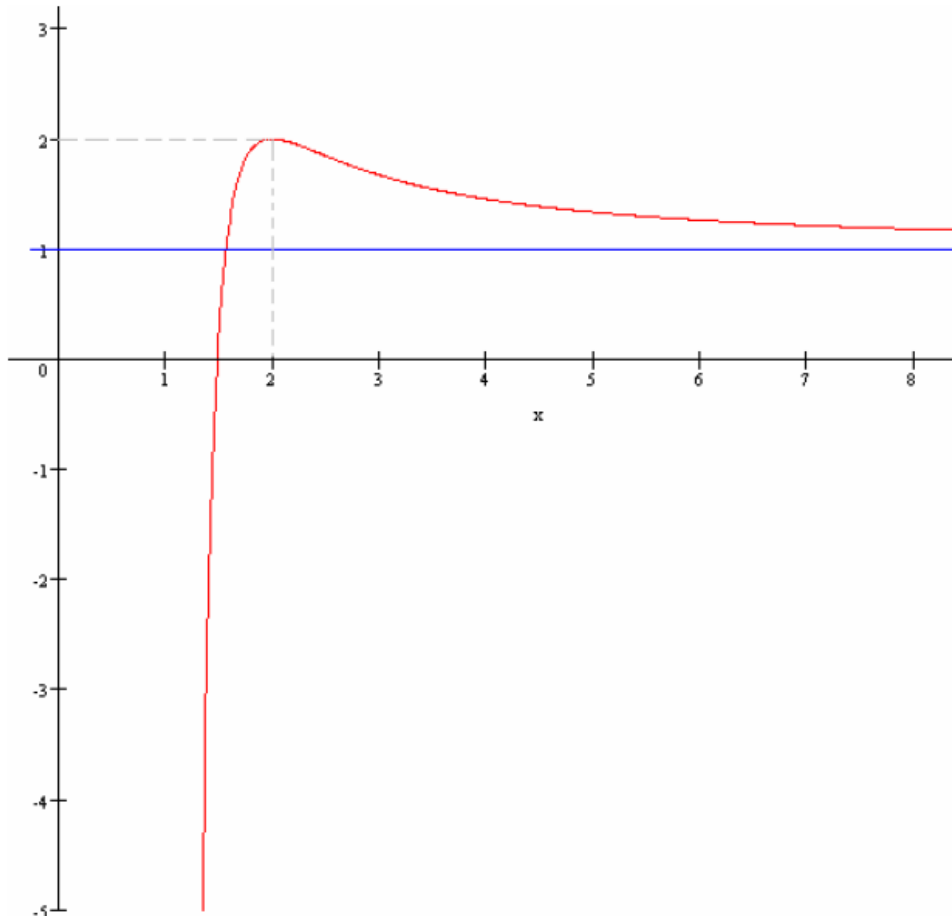
x	4	3	3/2	11/8
$f(x)$	$\frac{12 + \ln 3}{9}$	$\frac{6 + \ln 2}{4}$	$3 - 4 \ln 2$	$\frac{33 + 64 \ln \frac{3}{8}}{9}$
$\approx f(x)$	1,45	1,67	0,23	-3,31

ج) نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\left] \frac{11}{8}; \frac{3}{2} \right[$

لدينا f متصلة على و تزايدية قطعا على $\left] \frac{11}{8}; \frac{3}{2} \right[$ و $f\left(\frac{11}{8}\right) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\left] \frac{11}{8}; \frac{3}{2} \right[$

4- ننتشئ المنحنى C_f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$



(A) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1$

-1 بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

-2 بين أن $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $]0; +\infty[$ واستنتج منحى تغيرات g على $]0; +\infty[$

-3 استنتج أن $g(x) > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

(B) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على \mathbb{R} بـ

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 & ; x > 0 \\ f(x) = (1-x)e^x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

-1 / بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب/ حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا

ج/ بين أن f متصلة في 0 .

-2 أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و على اليسار في 0 ثم أول النتيجة هندسيا.

-3 / بين أن $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in]0; +\infty[$ وأن $f'(x) = -xe^x \quad \forall x \in]-\infty; 0[$

ب/ أعط جدول تغيرات f .

-4 بين أن النقطة A ذات الاصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

-5 بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

-6 أنشئ المنحنى (C_f) .

$$e^{-3} \approx 0,05 \quad e^{-2} \approx 0,14 \quad e^{-1} \approx 0,37 \quad \ln 3 \approx 1,1 \quad \ln 2 \approx 0,7$$

الحل

(A) الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1$

-4 نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1 \right) = 1$$

-5 نبين أن $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $]0; +\infty[$ ونستنتج منحى تغيرات g على $]0; +\infty[$

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1 \quad \text{ليكن } x \text{ من }]0; +\infty[$$

ومنه

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad g'(x) < 0 \quad \text{أي } \forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

اذن g تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$

6- نستنتج أن $\forall x \in]0; +\infty[\quad g(x) > 0$

لدينا g تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

اذن $\forall x \in]0; +\infty[\quad g(x) > 0$

(B) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 & ; x > 0 \\ f(x) = (1-x)e^x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

1- أ/ نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ثم نستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \quad \text{نضع } x = \frac{1}{t} \text{ ومنه } t = \frac{1}{x} \text{ و بالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 = +\infty \quad \text{و منه}$$

ب/ نحدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ونؤول النتيجة هندسياً

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - xe^x = 0$$

و منه محور الافاصل مقارب للمنحنى (C_f)

ج/ نبين أن f متصلة في 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln(x) + x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)e^x = 1$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \quad \text{اذن } f \text{ متصلة في } 0.$$

2- ندرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و على اليسار في 0 ثم نؤول النتيجة هندسياً.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1-x)e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} - e^x = 1 - 1 = 0$$

و منه f قابلية اشتقاق على اليسار في 0 و تقبل نصف مماس أفقي على يسار في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 = +\infty$$

و منه f غير قابلية الاشتقاق على اليمين في 0 و تقبل نصف مماس عمودي على اليمين في 0

3- أ/ نبين أن $\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = g(x)$ و أن $\forall x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) = -xe^x$

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 \quad x \in]0; +\infty[\quad \text{ليكن}$$

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + 1 = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1 = g(x)$$

$$f(x) = (1-x)e^x \quad x \in]-\infty; 0[\quad \text{ليكن}$$

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

ب/ نعطى جدول تغيرات f .

x	$+\infty$	0	$-\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

4- نبين أن النقطة A ذات الاصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

$$\text{ليكن } x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) = -xe^x$$

$$f''(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

$$f''(x) \Leftrightarrow -(x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	0	-1	$-\infty$
$f''(x)$	+		-

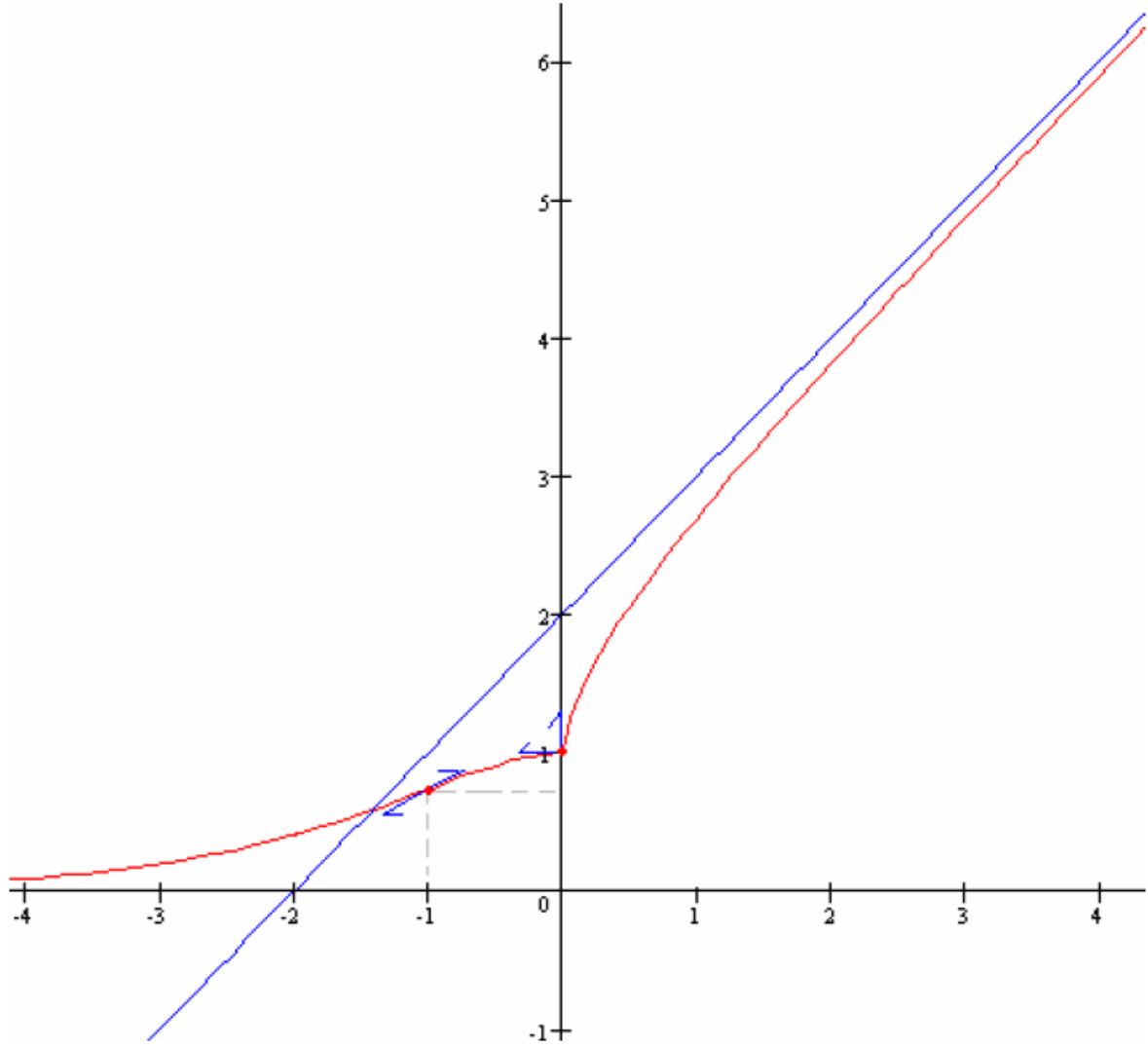
اذن النقطة A ذات الاصول -1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

اذن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

6- نشئ المنحنى (C_f) .



تمارين

1-ين

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$

2-ين

أدرس و مثل مبيانيا الدالة f حيث $\begin{cases} f(x) = x^{2x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

3-ين

1- حل في \mathbb{R} المعادلات $e^{x^2-3x-3} = e$; $e^{4x-3} = 2$ $3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = 0$

2- حل في \mathbb{R} المتراجحات

$2e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$; $e^x - 2e^{-x} + 1 > 0$ $3^{2x} - 3^x - 6 > 0$

3- حل في \mathbb{R}^2 النظام $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2^x = 3^y \end{cases}$

4-ين

أحسب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3} ; \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^x} - 1}{x - 1}$$

تمرين 5

I- نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

$$f(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1$$

I- نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

أ- حدد D_f ونهايات f عند محددات D_f

ب- أدرس تغيرات f

2- أ- حدد نقطة تقاطع C_f و محور الأفصائل

ب- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول 0

ج- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

د- أنشئ C_f

II- نعتبر الدالة g المعرفة بـ

$$g(x) = \ln(2e^x - 3e + 1)$$

أ- حدد D_g ونهايات g عند محددات D_g

ب- أدرس تغيرات g

2- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g ثم أنشئ C_g

تمرين 6

$$\begin{cases} f(x) = |2x(1 - \ln x)| & x > 0 \\ f(x) = e^{-1} - 1 - 2\sqrt{1 - e} & x \leq 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

1- أدرس اشتقاق و اتصال f عند النقطتين 0 و e

و أعط التأويل الهندسي للنتائج المحصل عليها

2- أحسب نهايات f عند محددات D_f ثم أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

3- أدرس تغيرات f و أنشئ C_f $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2 \text{ cm}$

4- بين أن g قصور الدالة f على $]-\infty; 0]$ تقابل من $]-\infty; 0]$ نحو مجال J يجب تحديده

أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 7

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ بحيث

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} + \ln|x^2 - 1|$$

1- أحسب نهايات f عند محددات D .

2- بين أن $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ لكل x من D و أعط جدول تغيرات f

3- استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ لكل x من D

II- لتكن g الدالة المعرفة على D بـ

$$g(x) = x \ln|x - 1|$$

1- أ- أحسب نهايات g عند محددات D .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2- بين لكل x من D $g'(x) = f(x)$ و أعط جدول تغيرات g .

3- أ- استنتج من دراسة الدالة f إحدائيتي I نقطة انعطاف المنحنى C_g

ب- حل في D المعادلة $g(x) = 0$

ج- أنشئ C_g

تمرين 8

الجزء الأول

لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين لكل x من \mathbb{R} $f(x) = xe^{2x} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}}\right)$

ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أدرس تغيرات f

3- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

ب- بين أن C_f يقطع محور الأفاصل في نقطة x_0 تنتمي إلى $[-2; -1]$

$$\left(e^4 \approx \frac{225}{4}; \quad e^2 \approx \frac{15}{2}; \quad e \approx \frac{11}{4} \right)$$

ج- أنشئ C_f $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

الجزء الثاني

لتكن g الدالة المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) & x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$

1- بين أن $g(x) = f(\ln x)$ $\forall x \in]0; +\infty[$

2- أدرس اتصال و اشتقاق g في يمين 0

3- أدرس تغيرات g

4- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g

ب- أستنتج من 2- ب- في الجزء الأول , تأطيرا لأفصول نقطة تقاطع C_g ومحور الأفاصل

ج- حدد نصف المماس لـ C_g في النقطة ذات الأفصول 0 ثم أنشئ C_g