التمرين الأول

التمرين الأول

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x)=2x-\frac{1}{x}-1-\ln x$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أحسب $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f)

5) أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين الثاني

التمرين الثاني

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي : $f(x)=x-\ln(x^2+1)$

1) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=x-2\ln|x|-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta):\ y=x$

4) أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

5) أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين الثالث

التمرين الثالث

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x)=x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

1) حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) بين أن المستقيم $(\Delta):\ y=x$ مقارب للمنحنى (C_f)

5) أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين الرابع

التمرين الرابع

(I) نضع $g(x)=2x^2+1-\ln x$

1) أحسب الدالة $g'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة g

2) استنتج أن $g(x)>0\ :\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=2x+\frac{\ln x}{x}$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

ب- بين أن المستقيم $(\Delta):y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب (Δ)

2) أ- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

3) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الخامس

I] لتكن g دالة عددية معرفة بما يلي: $g(x)=x-1-\ln x$ لكل x من $]0,+\infty[$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

ب- أحسب $g'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة g

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II] نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x\ln x \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

① أدرس اتصال وقابلية إشتقاق على يمين النقطة 0

② أ- أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f

③ أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

④ ارسم المنحنى C_f

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$

1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف f

ب- أحسب نهيات الدالة f عند محدات D_f

2) أحسب المشتقة $f'(x)$

3) نضع $g(x)=x\ln x-(x+1)\ln(x+1)$ حيث $x\in\mathbb{R}^{+*}$

أ- أحسب المشقة $g'(x)$ وبين أن g تناقصية

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ ثم استنتج أن $g(x)<0$ $\forall x\in \mathbb{R}^{+*}$

4) أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين السابع

لتكن g دالة بحيث $g(x)=1-x^2-x^2\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,1[$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,1]$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}\ln x$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 1

3) أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى C_f

التمرين الثامن

التمرين الثامن

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x\neq 0$ $f(x)=x-2-2x\ln x$ و $f(0)=-2$

① أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0

② أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$

③ أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

④ أدرس تقعر المنحنى C_f

⑤ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى C_f في النقطة $x_0=1$

⑥ أرسم (T) و المنحنى C_f

⑦ أدرس تغيرات الدالة $g(x)=\dfrac{\ln x}{(x-2)^2}$ و أرسم منحناها

التمرين التاسع

التمرين التاسع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x(1-\ln x) & : x>0 \\ f(x)=x+\ln(1-x) & : x<0 \end{cases}$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين و على يسار النقطة $x_0=0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- بين أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أنّ $\begin{cases} f'(x)=-\ln x & : x>0 \\ f'(x)=\dfrac{-x}{1-x} & : x<0 \end{cases}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أ- حل في $\mathbb{R}^{+*}$ المتراجحة $f(x)>x$

ب- أرسم المنحنى (C_f)

5) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و المعرفة بما يلي : $U_0=\dfrac{1}{e}$ و $U_{n+1}=U_n-U_n\ln U_n$

أ- بين أنّ $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0<U_n\leq 1$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ج- استنتج أنّ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين العاشر

التمرين العاشر

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ بما يلي : $x\neq 0$; $f(x)=\dfrac{x}{1+(\ln x)}$ و $f(0)=0$

و ليكن (C_f) منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ- بين أنّ f متصلة على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x > \frac{1}{e}}} f(x)$

3) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4) بين أنّ $f'(x) = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أرسم المنحنى (C_f)

6) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = e \quad ; \quad U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أنّ $U_n > 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- ادرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

ج- استنتج أنّ المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الحادي عشر

A. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{-2}{x+2} + \ln\frac{x+2}{x}$

1. بين أنّ : $(\forall x > 0); g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

2. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

3. أستنتج إشارة $g(x)$ على $]1;+\infty[$

B. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right), x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

و (C_f) منحناها في $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. بين أنّ f دالة متصلة عند 0 على اليمين

2. بين أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ (يمكنك وضع $t = \frac{2}{x}$) ماذا تستنتج ؟

3. أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 0$ على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة

4. بين أنّ : $(\forall x > 0); f'(x) = g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f

5. أدرس تقعر المنحنى (C_f)

1. أنشئ المنحنى (C_f)

C. نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 \in \left]0, \frac{2}{e-1}\right[$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أنّ $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \in \left]0, \frac{2}{e-1}\right[$

ب- بين أنّ $(U_n)_n$ تزايدية

ج- استنتج أنّ المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني عشر

التمرين الثاني عشر

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{+}-\{1\}$ بما يلي : $x \neq 0$ ، $f(x)=\dfrac{x^{2}}{\ln x}$ و $f(0)=0$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين $x_0=0$ و أحسب نهايات الدالة f

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$ ، وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f)

3) أ- بين أن المشتقة $f'(x)=\dfrac{x(-1+2\ln x)}{(\ln x)^{2}}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثالث عشر

التمرين الثالث عشر

الجزء1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{-2}{x^{2}+1}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^{2}}\right)$

1) أحسب نهايتي الدالة g

2) أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي للمجال $]0,1[$ و استنتج إشارة $g(x)$

الجزء2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$; $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^{2}}\right)$ و $f(0)=0$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- تحقق أن $(\forall x>0)\quad f(x)=x\ln\left(x^{2}+1\right)-2x\ln x$

ب- بين أن f متصلة على يمين $x_0=0$

ج- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

3) بين أن $(\forall x>0)\quad f'(x)=g(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \simeq 0{,}5$ و $f(\alpha)\simeq 0{,}8$)

التمرين الرابع عشر

التمرين الرابع عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالة $g(x)=x-1-2x\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أ- أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

بـ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا α في المجال $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(1)=0$)

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f(x)=1+x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

2) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

بـ أدرس رتابة الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

3) أ- تحقق أن $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(D)\ \ y=x$

بـ أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha=0{,}3$)

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$

أ- بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha < u_n \leq 1$

ب- أدرس رتابة المتتالية (u_n)

ج- استنتج ان (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

التمرين الخامس عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالتين g , h المعرفتين على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x-2)\ln x$

1) أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم أدرس منحى تغيرات الدالة g

ب- استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$

2) أ- بين أن $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- بين أن $(x-1)\ln x \geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$

3) استنتج أن $h(x) > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$

2) أ- بين أن $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

3) أ- أعط معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة ذات الأفصول 1

ب- تحقق أن $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ج- أدرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى C_f و المستقيم $(\Delta) : y = x$

4) أرسم المنحنى C_f و المستقيم (Δ) (نقبل أن C_f يقبل نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 1,5)

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي : $U_0 = \sqrt{e}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

1) بين بالترجع أن $1 < U_n < e$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية (يمكن استعمال السؤال 3)ج من الجزء الثاني)

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

الجزء الرابع : ليكن (Δ_f) الحيز المستوي المحصور بين المنحنى C_f و المستقيم $y = x$ و المستقيمين $x = 1$ ، $x = e$

1) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل $\int_1^e \ln x \, dx$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$

2) أ- تحقق أن الدالة $G(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ دالة أصلية للدالة $g(x) = x\ln x$

ب- أحسب التكامل $\int_1^e x \ln x \, dx$

3) استنتج مساحة الحيز (Δ_f)